

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE - REŠENJA
Saobraćaj, Građevinarstvo i Geodezija i geomatika
30.06.2008.

1. **Odrediti realni parametar a tako da rešenja x_1 i x_2 jednačine $x^2 + (a-2)x - a + 1 = 0$ zadovoljavaju uslov $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{3}$.**

Iz Vijetovih formula imamo: $x_1x_2 = 1 - a$, $x_1 + x_2 = 2 - a$. Odatle je

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(2-a)^2 - 2(1-a)}{1-a} =$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 2}{1-a} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 6a + 6 = 10 - 10a \wedge a \neq 1 \Leftrightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow a \in \{-2, \frac{2}{3}\}.$$

2. **Rešiti nejednačinu $\frac{x^2 - 6x + 6}{x - 4} < 1$.**

$$\frac{x^2 - 6x + 6}{x - 4} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 6 - x + 4}{x - 4} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 4} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-5)}{x-4} < 0$$

Ispitivanjem znaka činilaca izraza sa leve strane dobijamo $x \in (-\infty, 2) \cup (4, 5)$.

3. **Rešiti jednačinu $4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x+1} = 16$.**

Smenom $2^{x+1} = t$ dobijamo $t^2 - 15t - 16 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1, t_2 = 16$.

Prvo rešenje odbacujemo zbog $2^{x+1} > 0$, a iz drugog sledi $2^{x+1} = 16 = 2^4 \Leftrightarrow x = 3$.

4. **Rešiti jednačinu $\log_2^2(x+2) + \log_2(x+2)^2 = 3$.**

Data jednačina je definisana za $x > -2$. Koristeći pravila logaritmovanja dobijamo

$\log_2^2(x+2) - 2\log_2(x+2) = 3$. Uvođenjem smene $\log_2(x+2) = t$ dobijamo jednačinu

$t^2 - 2t - 3 = 0$, čija su rešenja $t_1 = -1, t_2 = 3$. Vraćanjem smene dobijamo:

$\log_2(x+2) = -1 \Leftrightarrow x+2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$; $\log_2(x+2) = 3 \Leftrightarrow x+2 = 8 \Leftrightarrow x = 6$, tako da $x \in \{-\frac{3}{2}, 6\}$.

5. **Rešiti jednačinu $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(2 + \sin 2x) = 2$.**

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)(2 + \sin 2x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot (2 + 2 \sin x \cos x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1 + \sin x \cos x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

6. **Ako su $B_1 = 8$ i $B_2 = 2$ površine osnova prave pravilne zarubljene četverostrane piramide zapremine $V = 28$, izračunati površinu njenog omotača M i dužinu prostorne dijagonale D .**

Iz formule za zapreminu zarubljene piramide možemo izračunati

njenu visinu: $28 = \frac{1}{3}H(8 + 2 + \sqrt{8 \cdot 2}) \Leftrightarrow H = 6$. Iz površina

baza dobijamo dužine ivica i dijagonala osnova:

$$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}, d_1 = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4, d_2 = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

Iz poprečnog preseka $MNPQ$ računamo visinu bočne strane

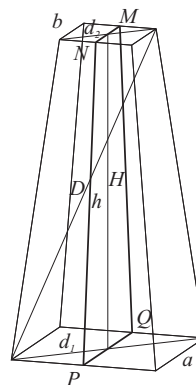
$$h^2 = H^2 + (\frac{a-b}{2})^2 = \frac{73}{2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{73}{2}}.$$

Sada možemo izračunati površinu omotača:

$$M = 4 \frac{a+b}{2} h = 4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{73}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{73}$$

i dužinu dijagonale piramide:

$$D^2 = H^2 + (d_1 - \frac{d_1-d_2}{2})^2 = 45 \Rightarrow D = 3\sqrt{5}.$$



7. Neka su $A(2, 1, -2)$, $B(4, 0, -1)$ i $C(4, 3, 2)$ tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$. Izračunati koordinate temena D i površinu paralelograma $ABCD$.

Neka je $D(x, y, z)$. Iz jednakosti vektora $\vec{AB} = \vec{DC}$ sledi $(2, -1, 1) = (4 - x, 3 - y, 2 - z) \Rightarrow D(2, 4, 1)$. Površina paralelograma predstavlja intenzitet vektorskog proizvoda vektora \vec{AB} i $\vec{AD} = (0, 3, 3)$:

$$P_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = |(-6, -6, 6)| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

8. Dužine stranica pravouglog trougla obrazuju aritmetički niz. Ako je površina trougla $P = \frac{3}{2}$, izračunati dužine stranica i poluprečnik upisane kružnice.

Na osnovu odnosa veličina stranica pravouglog trougla označićemo katete sa $a - d$ i a a hipotenuzu sa $a + d$. Iz Pitagorine teoreme sledi

$$(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2 \Rightarrow a^2 - 2ad + d^2 + a^2 = a^2 + 2ad + d^2 \Rightarrow a(a - 4d) = 0 \Rightarrow d = \frac{a}{4}.$$

Površina trougla $P = \frac{1}{2}a(a - d) = \frac{1}{2}a(a - \frac{a}{4}) = \frac{3}{2}$, odakle sledi $\frac{3a^2}{4} = 3$, što daje $a = 2$ i $d = \frac{1}{2}$.

Dužine stranica su $\frac{3}{2}$, 2 i $\frac{5}{2}$, a poluprečnik upisane kružnice r dobijamo iz formule za površinu

$$P = r \frac{O}{2} \Rightarrow r = \frac{2P}{O} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{2}.$$

9. Odrediti jednačinu tangente na parabolu $y^2 = x$ u onoj presečnoj tački sa pravom $y = -x + 2$ koja se nalazi u I kvadrantu.

Presečne tačke (x, y) se dobijaju rešavanjem sistema jednačina prave i parabole:

$$y = -x + 2 \wedge (-x + 2)^2 = x \Leftrightarrow y = -x + 2 \wedge x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 4) \wedge y = -x + 2 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 1), (4, -2)\}.$$

Samo tačka $(1, 1)$ pripada prvom kvadrantu. Tangenta u toj tački ima oblik $t: y - 1 = k(x - 1)$, gde je $k = f'(1)$. U prvom kvadrantu važi $y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$, pa je $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$,

što daje jednačinu tangente $t: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

10. Data je funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$. a) Izračunati vrednost funkcije f u tački $x = (1 - \sqrt{2})^2$.

b) Izračunati $f'(4)$. c) Izračunati $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$a) f\left((1 - \sqrt{2})^2\right) = \frac{\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} - 1}{(1 - \sqrt{2})^2 - 1} = \frac{|1 - \sqrt{2}| - 1}{1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1 - 1}{2 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 1) - (\sqrt{x} - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(x - 1)^2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{36}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$