Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE
Saobraćaj, Građevinarstvo i Geodezija i geomatika
30.06.2010.

1. Odrediti realan parametar m za koji je jedan koren jednačine $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0$ tri puta veći od drugog.

2. Rešiti nejednačinu
$$\frac{3x^2 - 2x - 17}{x^2 + x - 6} \geq 2.$$

3. Rešiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} 2^{2x} &- 5^y &= 39 \\ 2^x &+ 5^{\frac{y}{2}} &= 13. \end{aligned}$$

4. Rešiti nejednačinu
$$\log^2_{\frac{1}{2}} x < 4 + \log_{\frac{1}{2}} x^3.$$

5. Rešiti jednačinu
$$4 + 5\sin x = 2\cos^2 x.$$

6. Ako je $z_1 = 2 + 2i$ i $z_2 = 3 - i$, izračunati
$$z_1^4 + z_1 \cdot z_2 - 5\frac{\bar{z}_1}{z_2}.$$

7. Napisati jednačine tangenti na kružnicu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ koje su paralelne simetrali II kvadranta.

8. Neka su $A(-2,0,1)$ i $B(4,-1,2)$ dva susedna temena, a $T(2,1,2)$ presek dijagonala paralelograma $ABCD$. Odrediti koordinate temena C i D i ugao između dijagonala AC i BD.

9. Dati su poluprečnik $R = 4$ donje osnove zarubljene kupe i izvodnica $s = 5$. Ako je površina te zarubljene kupe $P = 42\pi$, izračunati njenu zapreminu.

10. Zbir svih članova opadajućeg geometrijskog niza je $\frac{9}{2}$, a zbir prva dva člana je 4. Izračunati četvrti član.

Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE
Saobraćaj, Građevinarstvo i Geodezija i geomatika
30.06.2010.

1. Odrediti realan parametar m za koji je jedan koren jednačine $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0$ tri puta veći od drugog.

Primenom Vietovih pravila i uslova zadatka $x_1 = 3x_2$ dobijamo:

$$x_1 + x_2 = -\tfrac{b}{a} \Leftrightarrow 4x_2 = 2(m+1) \Leftrightarrow x_2 = \tfrac{m+1}{2}\ (*)$$
$$x_1 \cdot x_2 = \tfrac{c}{a} \Leftrightarrow 3x_2^2 = m^2 + 3 \Leftrightarrow x_2^2 = \tfrac{m^2+3}{3}\ (**).$$

Kvadriranjem izraza $(*)$ i izjednačavanjem sa izrazom $(**)$ dobijamo:

$$\frac{(m+1)^2}{4} = \frac{m^2+3}{3} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{m = 3}.$$

2. Rešiti nejednačinu $\dfrac{3x^2 - 2x - 17}{x^2 + x - 6} \geq 2.$

$$\frac{3x^2 - 2x - 17}{x^2 + x - 6} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 17}{x^2 + x - 6} - 2 \geq \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + x - 6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \geq 0.$$

Ispitivanjem znaka monoma koji čine ovu nejednačinu dolazimo do njenog rešenja

$$\underline{x \in (-\infty, -3) \cup [-1, 2) \cup [5, \infty).}$$

3. Rešiti sistem jednačina $2^{2x} - 5^y = 39\,,\ 2^x + 5^{\frac{y}{2}} = 13.$

Uvođenjem smene $2^x = t,\ 5^{\frac{y}{2}} = s$ dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} t^2 - s^2 &=& 39 \\ t + s &=& 13 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} (t-s)(t+s) &=& 39 \\ t+s &=& 13 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} t - s &=& 3 \\ t + s &=& 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} t - s &=& 3 \\ 2t &=& 16 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} s &=& 5 \\ t &=& 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 5^{\frac{y}{2}} &=& 5^1 \\ 2^x &=& 2^3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} y &=& 2 \\ x &=& 3. \end{array}$$

Dakle, rešenje sistema je $\underline{(x,y) = (3,2)}$.

4. Rešiti nejednačinu $\log^2_{\frac{1}{2}} x < 4 + \log_{\frac{1}{2}} x^3.$

Nejednačina je definisana za $x > 0$. Primenom pravila logaritmovanja i smenom $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ dobijamo

$$\log^2_{\frac{1}{2}} x < 4 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 \Leftrightarrow \log^2_{\frac{1}{2}} x - 3\log_{\frac{1}{2}} x - 4 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 4).$$

Iz $\log_{\frac{1}{2}} x < 4$ sledi $x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$, a iz $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$ sledi $x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, tako da $\underline{x \in \left(\frac{1}{16}, 2\right)}$.

5. Rešiti jednačinu $4 + 5\sin x = 2\cos^2 x.$

Primenom jednakosti $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ i smenom $\sin x = t$ dobijamo

$$4 + 5\sin x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\frac{1}{2}.$$

Nakon vraćanja smene vidimo da jednačina $\sin x = -2$ nema rešenje, a iz $\sin x = -\frac{1}{2}$ dobijamo

$$\underline{x \in \{\frac{-5\pi}{6} + 2k\pi | k \in Z\} \cup \{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi | k \in Z\}.}$$

6. Ako je $z_1 = 2 + 2i$ i $z_2 = 3 - i$, izračunati $z_1^4 + z_1 \cdot z_2 - 5\frac{\overline{z_1}}{z_2}$.

$$z_1^4 + z_1 \cdot z_2 - 5\frac{\overline{z_1}}{z_2} = (2+2i)^4 + (2+2i)(3-i) - 5\,\frac{2-2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} =$$

$$= (4 + 8i - 4)^2 + (6 - 2i + 6i + 2) - 5\,\frac{6 + 2i - 6i + 2}{3^2 - i^2} =$$

$$= -64 + 8 + 4i - \frac{5}{10}(8 - 4i) = \underline{-60 + 6i}$$

7. Napisati jednačine tangenti na kružnicu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ koje su paralelne simetrali II kv.

Tangente su paralelne pravoj $y = -x$, pa je njihova jednačina oblika $y = -x + n$. Uvrštavanjem $y = -x + n$ u jednačinu kružnice dobijamo

$$x^2 - 4x + 4 + (-x+n)^2 - 2(-x+n) + 1 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + (-2n-2)x + n^2 - 2n + 3 = 0\,.$$

Da bi prava dodirivala kružnicu, diskriminanta D ove jednačine treba da je jednaka nuli.

$$D = (-2n-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (n^2 - 2n + 3) = -4(n^2 - 6n + 5) = 0 \Leftrightarrow\; n_1 = 1, n_2 = 5.$$

Jednačine tangenti su $\underline{t_1 : y = -x + 1\,,\; t_2 : y = -x + 5}$.

8. Neka su $A(-2,0,1)$ i $B(4,-1,2)$ dva susedna temena, a $T(2,1,2)$ presek dijagonala paralelograma $ABCD$. Odrediti koordinate temena C i D i ugao između dijagonala AC i BD.

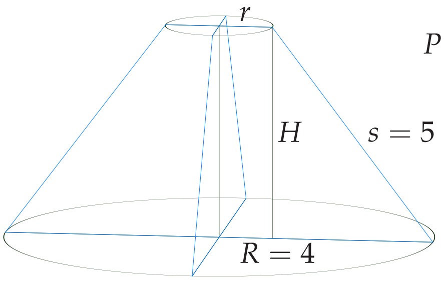
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = 2(2,1,2) - (-2,0,1) = (6,2,3)$$

Slično $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OB} = 2(2,1,2) - (4,-1,2) = (0,3,2)$, pa je $\underline{C(6,2,3)\,,\; D(0,3,2)}$.

Ako je $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ onda $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{(8,2,2)\cdot(-4,4,0)}{\sqrt{8^2+2^2+2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2+4^2+0^2}} = \frac{8\cdot(-4)+2\cdot 4+2\cdot 0}{\sqrt{72}\sqrt{32}} = \frac{-24}{6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$.

Tup ugao između dijagonala je $\underline{\alpha = \frac{2\pi}{3}}$ (a oštar je $\underline{\frac{\pi}{3}}$).

9. Dati su poluprečnik $R = 4$ donje osnove zarubljene kupe i izvodnica $s = 5$. Ako je površina te zarubljene kupe $P = 42\pi$, izračunati njenu zapreminu.



$$P = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)s\pi = [16 + r^2 + (4+r)\cdot 5]\pi = 42\pi \Rightarrow$$

$$r^2 + 5r - 6 = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (odbacujemo } r = -6)$$

$$H = \sqrt{s^2 - (R-r)^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot (16 + 4 + 1) = \underline{28\pi}$$

10. Zbir svih članova opadajućeg geometrijskog niza je $\frac{9}{2}$, a zbir prva dva člana je 4. Izračunati četvrti čl.

$$\frac{b_1}{1-q} = \frac{9}{2}, |q| < 1 \Leftrightarrow 1 - q = \frac{2b_1}{9} \Leftrightarrow q = 1 - \frac{2b_1}{9}$$

$$b_1 + b_2 = b_1 + b_1 q = b_1 + b_1\left(1 - \frac{2b_1}{9}\right) = 2b_1 - \frac{2b_1^2}{9} = 4 \Leftrightarrow$$

$$b_1^2 - 9b_1 + 18 = 0 \Leftrightarrow b_1' = 3, b_1'' = 6$$

Vrednosti b_1' odgovara $q' = \frac{1}{3}$ što daje opadajući niz, a vrednost $q'' = -\frac{1}{3}$ koja odgovara b_1'' se odbacuje zato što daje oscilatoran niz.

$$\underline{b_4 = b_1 q^3 = \frac{1}{9}}$$