1. Neka su $AB = a$ i $CD = b$ $(a > b)$ osnovice trapeza $ABCD$ i neka su mu kraci međusobno normalni. U zavisnosti od a i b odrediti dužinu duži MN, gde su M i N redom sredine njegovih osnovica AB i CD.

Rešenje: Neka je E presek produžetaka njegovih krakova. Kako je trougao ABE pravougli, to je $ME = \frac{1}{2}a$. Kako je trougao DCE pravougli, to je $NE = \frac{1}{2}b$. Tačke M, N i E su na istoj pravoj (kolinearne) jer su trouglovi ABE i DCE slični, pa je $MN = ME - NE = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a-b)$.

2. **a)** Naći oblast definisanosti (domen) i skup vrednosti (slika) funkcije $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

b) Da li je $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{za} \quad x < 0 \\ 0 & \text{za} \quad x = 0 \\ 1 & \text{za} \quad x > 0 \end{cases}$ za sve realne brojeve x? **c)** Dokazati da je $|x| \operatorname{sgn} x = x$.

Rešenje: a) Domen funkcije $f(x)$ je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a skup slika je $\{-1, 1\}$.
b) Kako funkcija $f(x)$ ima domen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a funkcija sgn ima domen $\mathbb{R}$, to sledi da one nisu jednake funkcije.
c) Za $x < 0$ imamo $-x \cdot (-1) = x$, za $x = 0$ sledi $0 \cdot 0 = 0$ i za $x > 0$ imamo $x \cdot 1 = x$.

3. Koliko ima šestocifrenih brojeva formiranih samo od cifara skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sa osobinom da svaka sledeća cifra (krećući se sleva na desno) nije manja od prethodne i

a) svaka cifra skupa A se pojavljuje bar jednom. **b)** ne mora se pojavljivati svaka cifra skupa A.

Rešenje: a) Prvi način: Efektivno ispisano to su brojevi
111234, **1**1**2**234, **1**12**3**34, **1**1234**4**, 1**22**234, 1**2**2**3**34, 1**2**234**4**, 12**33**34, 12**3**34**4**, 1234**44**

Drugi način: Svaka od cifara $1, 2, 3, 4$ se mora pojaviti bar jednom i preostaje samo još odabir dve cifre od četiri cifre pod uslovima zadatka pod **b)**, a to su kombinacije sa ponavljanjem od 4 elementa klase 2 tj. $\overline{C_2^4} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$ ili ispisano **11**, **12**, **13**, **14**, **22**, **23**, **24**, **33**, **34**, **44**. Primetimo da ako dodamo 1,2,3,4 svakoj od prethodnih 10 kombinacija, ali takođe u neopadajućem poretku, tada dobijamo ono ispisano na prvi način.

Treći način:
$ooo|o|o|o$, $oo|oo|o|o$, $oo|o|oo|o$, $oo|o|o|oo$, $o|ooo|o|o$, $o|oo|oo|o$, $o|oo|o|oo$, $o|o|ooo|o$, $o|o|oo|oo$, $o|o|o|ooo$,
jer broj kružića levo od prve pregrade je broj jedinica, broj kružića između prve i druge pregrade je broj dvojki, broj kružića između druge i treće pregrade je broj trojki i broj kružića desno od treće pregrade je broj četvorki. Jasno je da tačno jedna pregrada može da stoji između dva simbola „o" (kružića) i kako tih mesta između kružića ima 5, to od tih pet mesta biramo 3 na kojima će biti simboli | (pregrade), pa je rezultat broj kombinacija bez ponavljanja od 5 elemenata klase 3 tj. $C_3^5 = \binom{5}{3} = 10$.

b) $\overline{C_6^4} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$, jer su to kombinacije od 4 elementa klase 6 sa ponavljanjem.

Rešenje se priznaje samo ako su ili ispisane sve mogućnosti ili napisane formule $\binom{4+2-1}{2}$ ili $\binom{5}{3}$ odnosno $\binom{4+6-1}{6}$. Ako je samo napisan rezultat 10 odnosno 84, tada se ne priznaje.

4. Neka su P, Q i R tri temena kocke susedna temenu E te iste kocke. Izračunati odnos dužina telesne dijagonale kocke i visine piramide $EPQR$ čiji vrh je tačka E. **Rešenje:** Neka je ivica kocke a i visina piramide h.

Prvi način: Ako je T težište $\triangle PQR$, tada je $TE^2 = EP^2 - TP^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{(a\sqrt{2})\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. $\frac{a\sqrt{3}}{h} = 3$.

Drugi način: Kako je zapremina piramide V_{EPQR} jednaka šestini zapremine kocke, to iz $V_{EPQR} = \frac{1}{3}B \cdot h$ sledi $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$ tj. $h = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Traženi odnos je $\frac{a\sqrt{3}}{\frac{1}{3}a\sqrt{3}} = 3$.

Treći način: Uglovi koje obrazuje dijagonala kocke iz temena E sa ivicama EP, EQ, ER su jednaki uglovima koje obrazuje visina piramide sa tim istim ivicama, pa visina pripada dijagonali. Kako je visina piramide normalna na $\triangle PQR$ (jer je pravilna), to je i telesna dijagonala normalna na $\triangle PQR$. Uočimo dijagonalni presek kocke, pravougaonik čije stranice su a i $a\sqrt{2}$. Dijagonala tog pravougaonika $a\sqrt{3}$, je telesna dijagonala kocke, a projekcija stranice a na tu dijagonalu je tražena visina h te piramide, jer je ravan trougla PQR normalna na telesnu dijagonalu kocke, pa se projekcije tačaka P, Q, R na telesnu dijagonalu poklapaju sa težištem $\triangle PQR$. Kateta a pravouglog trougla je geometrijska sredina njene projekcije h na hipotenuzu i hipotenuze $a\sqrt{3}$, pa je $a^2 = h \cdot a\sqrt{3}$ tj. $h = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ i $\frac{a\sqrt{3}}{h} = 3$.

Četvrti način: Projekcije neke tri ivice kocke na telesnu dijagonalu te kocke prekrivaju celu dijagonalu, a bez krajnjih tačaka one su međusobno disjunktne. Kako te ivice kocke obrazuju iste uglove sa telesnom dijagonalom kocke, sledi da su te tri projekcije jednake, od kojih je jedna visina h piramide $EPQR$, pa je traženi odnos $3 : 1 = 3$.

5. Neka su A, B, C i D četiri proizvoljne tačke.

a) Ako je $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$ i $\overrightarrow{ON} = \vec{r}_N$ ($\vec{r}_M$ i $\vec{r}_N$ su vektori položaja tačaka M i N), izraziti $\overrightarrow{MN}$ u zavisnosti od $\vec{r}_M$ i $\vec{r}_N$.

b) Korišćenjem rezultata pod **a)** dokazati da je $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD}$.

c) Izračunati ugao između dijagonala AC i BD četvorougla $ABCD$ ako je $AB = 11$, $BC = 13$, $CD = 8$ i $AD = 4$.

Rešenje: a) $\overrightarrow{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M$ **b)** $2(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \cdot (\vec{r}_D - \vec{r}_B) = (\vec{r}_C - \vec{r}_B)^2 + (\vec{r}_D - \vec{r}_A)^2 - (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 - (\vec{r}_D - \vec{r}_C)^2 \Leftrightarrow 0 = 0$.
c) Na osnovu rezultata pod **b)** sledi $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 13^2 + 4^2 - 11^2 - 8^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

6. Neka je $z=-1-i\sqrt{3}$ kompleksni broj. Izračunati:

a) modul od z tj. $\rho=|z|$.

b) argument od z tj. $\varphi=\arg z$ koji pripada intervalu $(-\pi,\pi]$.

c) realni i imaginarni deo broja z^{2010} tj. $R_e(z^{2010})$ i $I_m(z^{2010})$.

Rešenje: **a)** $\rho=|z|=2$. **b)** $\varphi=\arg z=-\frac{2\pi}{3}$. **c)** Prvi način: $z^{2010}=(-1-i\sqrt{3})^{2010}=\big((-1-i\sqrt{3})^3\big)^{670}=$ $=\big((-1-i\sqrt{3})^2(-1-i\sqrt{3})\big)^{670}=\big((-2+2i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})\big)^{670}=8^{670}=2^{2010}$. $R_e(z^{2010})=2^{2010}, I_m(z^{2010})=0$. Drugi način (Korišćenjem trigonometrijskog oblika kompleksnog broja $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$): $(-1-i\sqrt{3})^{2010}=$ $=2^{2010}(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3})^{2010}=2^{2010}(\cos\frac{-4020\pi}{3}+i\sin\frac{-4020\pi}{3})=2^{2010}(\cos 1340\pi-i\sin 1340\pi)=2^{2010}$. Koristili smo formulu $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$.

7. Neka je razlika realnih brojeva a i b jednaka -1 i neka je njihov proizvod jednak 12.

a) Odrediti sve uređene parove realnih brojeva (a,b).

b) Odrediti normalizovani polinom drugog stepena (koeficijenat uz kvadratni član je 1), takav da $\max\{a,b\}$ (najveći od brojeva a i b) uvek jeste nula (koren) tog polinoma. Da li je traženi polinom jedini sa tom osobinom?

Rešenje: **a)** Rešavanjem sistema $a-b=-1,\ ab=12$ dobijaju se rešenja $(a,b)\in\{(-4,-3),(3,4)\}$ **b)** Kako je $\max\{-4,-3\}=-3$ i $\max\{3,4\}=4$, to normalizovani polinom drugog stepena čiji koreni su $x_1=-3$ i $x_2=4$ jeste po Vietovim formulama $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x-12$ i on je jedini sa tom osobinom.

8. Neka je funkcija f definisana sa $f(x)=2\log_{x+1}5-\log_5(x+1)+1$.

a) Naći nule (korene) funkcije f u skupu realnih brojeva.

b) Rešiti nejednačinu $f(x)<0$ u skupu realnih brojeva.

Rešenje: Smenom $t=\log_5(x+1)$ dobija se $f(x)=F(t)=\frac{2}{t}-t+1=\frac{-t^2+t+2}{t}=-\frac{t^2-t-2}{t}=-\frac{(t+1)(t-2)}{t}$.

a) $f(x)=F(t)=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=2\Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}\vee x=24$, jer je $x=5^t-1$ zbog $t=\log_5(x+1)$

b) $-\frac{(t+1)(t-2)}{t}<0\Leftrightarrow\frac{(t+1)(t-2)}{t}>0\Leftrightarrow t\in(-1,0)\cup(2,\infty)\Leftrightarrow x=5^t-1\in(-\frac{4}{5},0)\cup(24,\infty)$.

9. Neka je f funkcija definisana sa $f(x)=\sqrt{3}-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}-x)$.

a) Naći nule (korene) funkcije f u intervalu $(0,2\pi)$. **b)** Rešiti nejednačinu $f(x)>0$ u intervalu $(0,2\pi)$.

Rešenje: $f(x)=\sqrt{3}-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}-x)=\sqrt{3}-\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}x}=\sqrt{3}-\operatorname{tg}x-\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=\frac{-\sqrt{3}\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}$.

a) $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{-\sqrt{3}\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=0\Leftrightarrow x=k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi$. Iz intervala $(0,2\pi)$ su samo nule $\frac{\pi}{3}$, π i $\frac{4\pi}{3}$.

b) $f(x)>0\Leftrightarrow\frac{-\sqrt{3}\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}>0\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}{\operatorname{tg}x+\frac{1}{\sqrt{3}}}<0\Leftrightarrow$

$\operatorname{tg}x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})\cup(0,\sqrt{3})\Leftrightarrow x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{6}+k\pi)\cup(k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi)$.

Intervalu $(0,2\pi)$ pripada samo $(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})\cup(\pi,\frac{4\pi}{3})\cup(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$.

$\operatorname{tg}x$ $-\infty$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 0 $\sqrt{3}$ ∞				
$\operatorname{tg}x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\operatorname{tg}x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}{\operatorname{tg}x+\frac{1}{\sqrt{3}}}$	$-$	$+$	$-$	$+$

10. Neka je funkcija f definisana sa $f(x)=(x+7)(x^2+x-2)=x^3+8x^2+5x-14$.

a) Naći nule funkcije f i rastaviti na proste (nesvodljive) činioce (faktore) polinom $f(x)$.

b) Naći ekstremne tačke $A\big(\alpha,f(\alpha)\big)$ i $B\big(\beta,f(\beta)\big)$ funkcije f.

c) Odrediti intervale u kojima funkcija f raste.

d) Naći jednačine tangenti grafika funkcije f kojima pripada tačka $N(-7,0)$.

Rešenje: **a)** Nule funkcije f su $-7,-2$ i 1, dok je $f(x)=(x+7)(x+2)(x-1)$.

b) Ekstremi slede iz $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+16x+5=0\Leftrightarrow x=-5\vee x=-\frac{1}{3}$, pa je $A(-5,36)$ i $B(-\frac{1}{3},-\frac{400}{27})$. Tačka A je maksimum, a tačka B je minimum jer $f''(x)=6x+16$, $f''(-5)=-14<0$ i $f''(-\frac{1}{3})=14>0$.

c) Funkcija f raste za $f'(x)>0\ \Leftrightarrow\ 3x^2+16x+5>0\ \Leftrightarrow\ x\in(-\infty,-5)\cup(-\frac{1}{3},\infty)$

d) Jednačina tangente na krivu $y=f(x)$ kroz tačku $(-7,0)$ je $y-0=f'(\gamma)(x+7)$, gde $P(\gamma,f(\gamma))$ pripada i grafiku funkcije f i grafiku tangente $y-0=f'(\gamma)(x+7)$, pa sledi da je $f(\gamma)=f'(\gamma)(\gamma+7)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (\gamma+7)(\gamma+2)(\gamma-1)=(3\gamma^2+16\gamma+5)(\gamma+7)\ \Leftrightarrow\ \gamma=-7\vee 2\gamma^2+15\gamma+7=0\ \Leftrightarrow\ \gamma=-7\vee\gamma=-\frac{1}{2}$,

pa su jednačine traženih tangenti $y-0=f'(\gamma)(x+7)$ za $\gamma\in\{-7,-\frac{1}{2}\}$ tj. $y=40(x+7)$ i $y=-\frac{9}{4}(x+7)$.