



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA  
NOVI SAD



Сертификован  
систем  
квалитета



**ZBIRKA ZADATAKA  
SA PRIJEMNIH ISPITA  
NA FAKULTETU TEHNIČKIH NAUKA  
(MATEMATIKA)**



NOVI SAD, 2010.

**Izdavač:**

*Fakultet tehničkih nauka  
Trg Dositeja Obradovića 6  
21000 Novi Sad*

**Glavni i odgovorni urednik:**

*Prof. dr Ilija Ćosić, dekan*

**Uređivački odbor:**

*Prof. dr Ilija Ćosić  
Prof. dr Ilija Kovačević  
Prof. dr Janko Hodolič  
Prof. dr Vladimir Katić  
Prof. dr Srđan Kolaković*

**Tehnička obrada:**

*Mr Ranko Bojanić  
Mr Nenad Simeunović  
Gordana Bajčetić*

**Štampanje odobrio:**

*Savet za izdavačku delatnost Fakulteta tehničkih nauka*

**Predsednik Saveta za izdavačku delatnost:**

*Prof. dr Radomir Folić*

**Informacije:**

Trg Dositeja Obradovića 6  
Telefon: (021) 459-141  
Fax: (021) 458-133  
e-mail: *bojanicr@uns.ac.rs*  
[www.ftn.uns.a.rs](http://www.ftn.uns.a.rs)

**Tiraž:**

**Štampa:**

## OPŠTE INFORMACIJE O PRIJEMNOM ISPITU

**1a.** Prijemni ispit iz **Matematike** polažu kandidati koji žele da upišu sledeće oblasti:

- **Elektrotehnika i računarstvo** (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Energetika, elektronika i telekomunikacije; Računarstvo i automatika).
- **Saobraćaj** (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Saobraćaj i transport; Poštanski saobraćaj i telekomunikacije).
- **Građevinarstvo** (kandidati se upisuju na studijski program: Građevinarstvo).
- **Mehatronika** (kandidati se upisuju na studijski program: Mehatronika).
- **Geodezija i geomatika** (kandidati se upisuju na studijski program: Geodezija i geomatika).

**1b.** Prijemni ispit iz **Matematike sa proverom sklonosti** za studije odgovarajuće oblasti polažu kandidati koji žele da upišu sledeće oblasti:

- **Mašinstvo** – Matematika sa proverom sklonosti za studije mašinstva (kandidati se upisuju na jedan od sledeća četiri studijska programa: Proizvodno mašinstvo; Mehanizacija i konstrukciono mašinstvo; Energetika i procesna tehnika; Tehnička mehanika).
- **Industrijsko inženjerstvo i inženjerski menadžment** – Matematika sa proverom sklonosti za studije industrijskog inženjerstva i inženjerskog menadžmenta (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Industrijsko inženjerstvo; Inženjerski menadžment).
- **Grafičko inženjerstvo i dizajn** – Matematika sa proverom sklonosti za studije grafičkog inženjerstva i dizajna (kandidati se upisuju na jedan studijski program: Grafičko inženjerstvo i dizajn).
- **Inženjerstvo zaštite životne sredine i zaštine na radu** – Matematika sa proverom sklonosti za studije inženjerstva zaštite životne sredine (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Inženjerstvo zaštite životne sredine; Inženjerstvo zaštite na radu).

**1c.** Prijemni ispit iz Geometrije sa arhitektonskom i opštom kulturom; Slobodoručno crtanje i Prostorna kompozicija polažu kandidati koji žele da upišu sledeću struku (oblast):

- **Arhitektura** (kandidati se upisuju na jedan studijski program: Arhitektura i urbanizam).

**2.** Ukupan broj bodova na osnovu kojeg se vrši rangiranje kandidata za upis na Fakultet formira se kao zbir bodova ostvarenih po sledećim uslovima:

- Opšti uspeh u srednjem obrazovanju (maksimalni broj 40, a minimalni 16 bodova).
- Uspeh na prijemnom ispitu iz Matematike (maksimalni broj je 60 bodova) za upis na Elektrotehniku i računarstvo, Građevinarstvo, Saobraćaj i Mehatroniku.
- Uspeh na prijemnom ispitu iz Matematike sa proverom sklonosti za studije odgovarajuće struke (maksimalni broj je 60 bodova) za upis na Mašinstvo, Industrijsko inženjerstvo i menadžment, Grafičko inženjerstvo i dizajn i Inženjerstvo zaštite životne sredine i to:
  - Matematika donosi maksimum 30 bodova od prijemnog ispita,
  - Provera sklonosti donosi takođe maksimum 30 bodova od prijemnog ispita.
- Uspeh na prijemnom ispitu za upis Arhitekture (maksimalni broj je 60):
  - Geometrija sa arhitektonskom i opštom kulturom donosi maksimum 18 bodova od prijemnog ispita,
  - Slobodoručno crtanje donosi maksimum 21 bod od prijemnog ispita,
  - Prostorna kompozicija donosi maksimum 21 bod od prijemnog ispita.

**Da bi kandidat bio rangiran potrebno je da osvoji minimum 14 bodova na prijemnom ispitu.**

**Priprema za polaganje prijemnog ispita za upis arhitekture se izvodi na Fakultetu tokom cele godine. Informacije se mogu dobiti na telefon: 021 / 6350 – 293 и 021 / 485 – 2223.**

**Informacije za pripremnu nastavu iz matematike se mogu dobiti na telefon : 021/6350-770**

**PROGRAM PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE ZA UPIS ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA; GRAĐEVINARSTVA; SAOBRAĆAJA; MEHATRONIKE; GEODEZIJE I GEOMATIKE**

Na ispitu iz matematike polaže se gradivo predviđeno nastavnim planom i programom za srednje obrazovanje.

1. Osnovne logičke operacije, pojam funkcije.
2. Brojevi (prirodni, celi, racionalni, iracionalni, realni, kompleksni).
3. Proporcionalnost veličina i primene.
4. Racionalni algebarski izrazi. Polinomi.
5. Linearna funkcija. Linearne jednačine i nejednačine, sistemi linearnih jednačina i nejednačina.
6. Stepenovanje i korenovanje.
7. Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine. Sistemi kvadratnih jednačina.
8. Algebarske i iracionalne jednačine i nejednačine.
9. Pojam logaritma. Logaritamska i eksponencijalna funkcija. Logaritamske i eksponencijalne jednačine i nejednačine.
10. Trigonometrijske funkcije. Identiteti, jednačine i nejednačine. Primena trigonometrije.
11. Matematička indukcija i nizovi. Aritmetička i geometrijska progresija.
12. Kombinatorika i binomni obrazac.
13. Planimetrija (prvenstveno geometrija trougla, četvorougla i kruga).
14. Stereometrija (prizma, piramida, zarubljena piramida, valjak, kupa, zarubljena kupa, sfera i delovi sfere).
15. Vektori.
16. Analitička geometrija u ravni (prava, kružnica, elipsa, hiperbola i parabola).
17. Granične vrednosti nizova i funkcija. Izvod i primena

***Literatura***

1. Srednjoškolski udžbenici iz matematike
2. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita, FTN, 2010.

**PROGRAM PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE SA PROVEROM SKLONOSTI ZA  
STUDIJE ODGOVARAJUĆE OBLASTI ZA UPIS: MAŠINSTVA; INDUSTRIJSKOG  
INŽENJERSTVA I INŽENJERSKOG MENADŽMENTA; GRAFIČKOG  
INŽENJERSTVA I DIZAJNA; INŽENJERSTVA ZAŠTITE ŽIVOTNE SREDINE I  
ZAŠTITE NA RADU**

Ispit se sastoji iz dva dela i to:

- Matematika (pet zadataka)
- Provera sklonosti za studije odgovarajuće struke (deset pitanja).

**Program dela prijemnog ispita: Matematika**

1. Osnovne logičke operacije, pojam funkcije.
2. Brojevi (prirodni, celi, racionalni, iracionalni, realni), stepenovanje i korenovanje, racionalni algebarski izrazi i polinomi.
3. Proporcionalnost veličina i primene.
4. Linearna funkcija. Linearne jednačine i nejednačine, sistemi linearnih jednačina i nejednačina.
5. Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine. Sistemi kvadratnih jednačina.
6. Algebarske i iracionalne jednačine i nejednačine.
7. Pojam logaritma. Logaritamska i eksponencijalna funkcija. Logaritamske i eksponencijalne jednačine i nejednačine.
8. Trigonometrijske funkcije. Identiteti, jednačine i nejednačine. Primena trigonometrije.
9. Matematička indukcija i binomni obrazac.
10. Vektori.

**Literatura**

1. Srednjoškolski udžbenik iz matematike
2. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita, FTN, 2010

**ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO, SAOBRAĆAJ I GRAĐEVINARSTVO**  
(prijemni ispit u julu 2001 i septembru 2001. i 2002. godine je bio isti za ove tri struke)

1. U skupu realnih brojeva naći skup rešenja nejednačine

$$\frac{-x^2 + 2x - 16}{x - 6} \geq 3.$$

2. Naći  $m$  tako da zbir korena (rešenja) jednačine

$$x^2 + (2 + m - m^2)x + m^2 = 0$$

bude jednak 0, a da proizvod bude jednak 4.

3. Dokazati da za svaki prirodan broj  $n$  važi jednakost

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

4. Zbir prvih tri člana geometrijskog niza je 91. Ako se zbir prvog i trećeg člana pomnoži sa  $\frac{30}{61}$ ,

dobija se drugi član niza. Odrediti prva tri člana niza.

5. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) + 4 = 2x.$$

6. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0.$$

7. Stranica romba je  $a = 5$ , a zbir dijagonala  $d_1 + d_2 = 14$ . Izračunati površinu romba.

8. Koliko se petocifrenih brojeva može napisati od cifara  $0, 1, \dots, 9$ , ako se cifre

- mogu ponavljati;
- ne mogu ponavljati.

9. Data je prava  $2x + y - 12 = 0$  i parabola  $y^2 = 4x$ . Naći jednačinu tangente na parabolu u presečnoj tački  $M(x_0, y_0)$ ,  $y_0 < 0$ , prave i parabole.

10. Visina i izvodnica kupe odnose sa kao  $1 : 2$ , a njena zapremina je  $1000\pi \text{ cm}^3$ . Izračunati površinu kupe.

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

**REŠENJA:**

1.  $x \in (-\infty, -2] \cup [1, 6)$ .

2. Na osnovu Vietovih formula, iz  $x_1 + x_2 = -(2 + m - m^2) = 0$  i  $x_1 x_2 = m^2 = 4$  sledi da je  $m = 2$ .

3. Da data jednakost važi za svaki prirodan broj  $n$  dokazaćemo koristeći princip matematičke indukcije. Za  $n = 1$  data jednakost važi, jer je

$$1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2.$$

Pretpostavimo da data jednakost važi za  $n = k$ , tj.

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Dokazaćemo da data jednakost važi i za  $n = k + 1$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Dakle, na osnovu principa matematičke indukcije data jednakost važi za svaki prirodan broj  $n$ .

4. Označimo sa  $b_1$ ,  $b_2$  i  $b_3$  prva tri člana geometrijskog niza. Iz  $b_1 + b_2 + b_3 = 91, (b_1 + b_3) \cdot \frac{30}{61} = b_2$ , sledi da je  $b_2 = 30$  i  $b_1 + b_3 = 61$ .  
Iz  $b_1 + b_3 = 61$  i  $b_1 \cdot b_3 = 900$  sledi da je  $(b_1, b_2, b_3) \in \{(25, 30, 36), (36, 30, 25)\}$ .
5. Iz  $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) + 4 = 2x$  sledi da je  $(4^x - 16)^2 = 0$ , tj. da je rešenje date jednačine realan broj  $x = 2$ .
6. Deljenjem date jednačine sa  $\cos x$  ( $\cos x \neq 0$ ) dobija se jednačina  $3 - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0$  sa rešenjima  $\operatorname{tg} x = 1$  ili  $\operatorname{tg} x = -3$ .  
Iz  $\operatorname{tg} x = 1$  sledi da je skup rešenja ove jednačine  $A = \left\{ \frac{\pi}{4} + k_1 \pi : k_1 \in \mathbf{Z} \right\}$ . Iz  $\operatorname{tg} x = -3$  sledi da je skup rešenja ove jednačine  $B = \{ -\operatorname{arctg} 3 + k_2 \pi : k_2 \in \mathbf{Z} \}$ .  
Skup svih rešenja date jednačine je skup  $C = A \cup B$ .
7. Iz  $d_1 + d_2 = 14$  i  $a = 5$  sledi da je  $d_1 \cdot d_2 = 48$ . Kako je površina romba  $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$  to je površina traženog romba  $P = 24$ .
8. a)  $V_5^{10} - V_4^{10} = 10^5 - 10^4 = 9 \cdot 10^4$ .  
b)  $V_5^{10} - V_4^{10} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9^2$ .
9. Iz  $2x + y = 12$  i  $y^2 = 4x$  sledi da je  $(x, y) = (4, 4)$  ili  $(x, y) = (9, -6)$ . Dakle, tražena tačka je  $M(9, -6)$ . Jednačina tangente u datoj tački  $M$  na parabolu je prava  $y = -\frac{1}{3}x - 3$ .
10. Kako je  $H : s = 1 : 2$ , to je  $s = 2H$ . Iz  $r^2 = s^2 - H^2$  sledi da je  $r = H\sqrt{3}$ . Iz  $V = \frac{1}{3} r^2 \pi H = 1000\pi \text{ cm}^3$  sledi da je  $H = 10 \text{ cm}$ , pa je  $r = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $s = 20 \text{ cm}$ . Dakle, tražena površina kupe je  $P = r^2 \pi + r \pi s = 100\pi(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ .

1. Izračunati  $\left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3^x - 3^{-x}}{2}\right)^2$ .
2. Rešiti nejednačinu  $\frac{x^2 + x - 2}{x - 3} \leq 0$ .
3. Dokazati da za svaki prirodan broj  $n$  važi  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .
4. U jednačini  $x^2 - (k+2)x + 2(k+2) = 0$  odredi realan parametar  $k$  tako da jedan koren (nula) jednačine bude dva puta veći od drugog korena.
5. Ako je zbir prva tri člana aritmetičkog niza 21, a zbir prvih šest članova 78, naći zbir prvih devet članova.
6. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu  $9^x - 24 \cdot 3^{x-1} = 9$ .
7. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu  $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ .
8. U pravouglom trouglu date su katete  $a = 3\text{cm}$  i  $b = 4\text{cm}$ . Odredi visinu koja odgovara hipotenuzi.
9. Odrediti presečne tačke kružnice  $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$  i prave  $x - y + 4 = 0$ .
10. Pravougli trougao čije su katete  $a = 3\text{cm}$  i  $b = 4\text{cm}$  rotira oko katete  $b$ . Naći zapreminu nastalog rotacionog tela.

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

**REŠENJA:**

$$1) \left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3^x - 3^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2} - \frac{3^x - 3^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2}\right) = \frac{2 \cdot 3^{-x}}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3^x}{2} = 1.$$

$$2) \frac{x^2 + x - 2}{x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [1, 3)$$

$$3) n = 1: \frac{1 \cdot 2}{2} = 1;$$

Pretpostavka da tvrđenje važi za  $n = k$ :  $1 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ . Dokaz da tvrđenje važi za  $n = k + 1$ :

$$1 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

$$4) x_1 = 2x_2 \quad x_2 = \frac{k+2}{3}$$

$$x_1 + x_2 = k + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{2k+4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad k + 2 = 9$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2(k+2) \quad \frac{k+2}{3} \cdot \frac{2k+4}{3} = 2k+4 \quad k = 7$$

$$5) S_3 = 21 \quad \wedge \quad S_6 = 78 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(2a_1 + 2d) = 21 \quad \wedge \quad \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 78$$

Rešavanjem sistema jednačina  $a_1 + d = 7 \quad \wedge \quad 2a_1 + 5d = 26$  dobijamo  $a_1 = 3$  i  $d = 4$  tako da je

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 3 + 9 \cdot 4) = 210$$

$$6) (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0, \quad t = 3^x, \quad t^2 - 8t - 9 = 0, \quad t_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2}$$

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -1, \Rightarrow 3^x = 9, 3^x = -1; 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \quad 3^x = -1 \text{ nema rešenja.}$$

Dakle, rešenje je samo realan broj  $x = 2$

$$7) \sin^2 x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$-\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \quad x = (1 + 2k)\pi, \quad k \in Z$$

$$\cos x = 2 \quad \text{nema rešenje}$$

$$8) c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \quad a \cdot b = c \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{3 \cdot 4}{5} \quad h_c = 2.4 \text{ cm}$$

$$9) (y-4)^2 + y^2 + 6(y-4) - 4y = 0 \quad \wedge \quad x = y - 4$$

$$y = 4 \Rightarrow x = 0 \quad A(0, 4)$$

$$y = -1 \Rightarrow x = -5 \quad B(-5, -1)$$

$$10) V = \frac{1}{3} B \cdot H, \quad B = r^2 \pi = 9\pi$$

$$H = b = 4 \text{ cm} \quad V = \frac{1}{3} 9\pi \cdot 4$$

$$r = a = 3 \text{ cm} \quad V = 12\pi \text{ cm}^3$$

**ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO, MEHATRONIKA, SAOBRAĆAJI  
GRAĐEVINARSTVO**

septembar 2002

1. Naći interval najmanje dužine kojem pripada realan broj  $k$  tako da rešenja  $x_1, x_2$  kvadratne jednačine  $(k-1)x^2 + (k-5)x - (k+2) = 0$  zadovoljava uslov  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$ .
2. Cena nekog proizvoda povećana je za 40%. Za koliko procenata treba menjati dobijenu cenu, da bi se dobila prosečna cena?
3. Zbir tri uzastopna člana aritmetičke progresije je 54. Ako je najveći od njih dva puta veći od najmanjeg, naći proizvod ta tri broja.
4. Ako je  $\cos x + \cos y = a$ ,  $\sin x + \sin y = b$ ,  $a \neq 0$ , pokazati da je  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$ . Naći  $\cos(x+y)$  kao funkciju od  $a$  i  $b$ .
5. Rešiti jednačinu  $\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 5 = 0$ .
6. Naći jednačinu kružnice koja spolja dodiruje kružnicu  $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$  a centar joj je u tački  $C(5, 4)$ .
7. Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne. Izračunati njegovu površinu ako je krak  $c = 2\sqrt{5}$ , a odnos osnovica 3:1.
8. Osnova prave pravilne šestostrane piramide je upisana u osnovu valjka a njen vrh leži u centru gornje osnove valjka. Ako je visina piramide  $H = 6 \text{ cm}$ , a njena zapremina  $V = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$ , naći površinu valjka.
9. Naći rešenje jednačine  $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$ .
10. Koeficijent četvrtog i šestog člana u razvijenom obliku binoma  $\left(\frac{1}{a} + \sqrt{a}\right)^n$  odnose se kao 5:18. Naći vrednost člana koji ne sadrži  $a$ .

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

**REŠENJA:**

1. 
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} > 2 \Leftrightarrow \frac{-\frac{k-5}{k-1}}{-\frac{k+2}{k-1}} > 2 \Leftrightarrow \frac{k+9}{k+2} < 0$$
$$k \in (-9, -2).$$

2. C- prvobitna cena

nakon povećanja:  $C + \frac{40}{100}C = \frac{7}{5}C$  smanjuje se za x procenata

$$\frac{7}{5}C - \frac{x}{100} \frac{7}{5}C = C \Leftrightarrow x = \frac{200}{7} = 28.57\%$$

3.

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d &= 54 \\ a_1 + d = 18 &\Rightarrow a_2 = 18 \\ a_1 + 2d &= 2a_1 \\ -a_1 + 2d &= 0 \\ a_1 = 12, a_3 = 24, d &= 6 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 &= 12 \cdot 18 \cdot 24 = 5184 \end{aligned}$$

4.

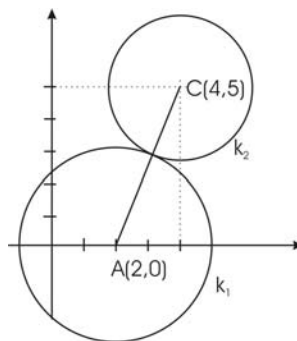
$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \\ \cos(x+y) &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{2}} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

5.

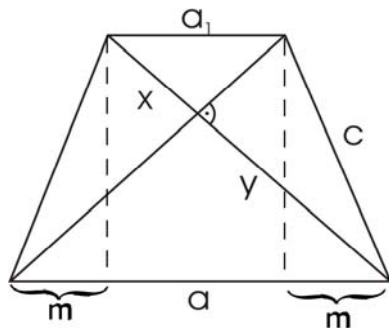
$$\begin{aligned} \sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 5 &= 0 \\ \sqrt{\log_2 x} &= t^2 \\ t - t^2 - \log_2 8 + 5 &= 0 \\ -t^2 + t + 2 &= 0 \\ t_1 &= -1 \\ t_2 &= 2 \\ \log_2 x = 4 &\Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} k_1 : (x-2)^2 + y &= 9 \\ d(A, C) &= \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = 5 \\ r_2 = d(A, C) - r_1 &= 2 \\ k_2 : (x-5)^2 + (y-4)^2 &= 4 \end{aligned}$$

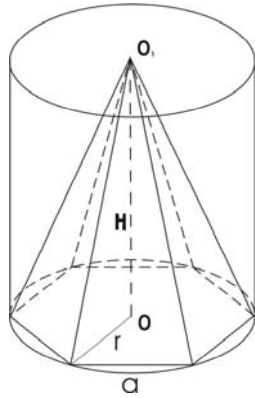


7.



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= c^2 = 20 \\ 2y^2 &= a^2 \\ 2x^2 &= a_1^2 \\ a &= 3a_1 \\ x^2 + y^2 &= 5a_1^2 \\ 5a_1^2 &= 20 \\ a_1 &= 2 \\ a &= 6 \\ m &= \frac{a - a_1}{2} = 2 \\ h^2 &= c^2 - m^2 = 4 \\ P &= \frac{a + a_1}{2} \cdot h = 16 \end{aligned}$$

8.



$$r = a$$

$$V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3}6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

$$P_V = 2r\pi H + 2r^2\pi$$

$$P_V = 32\pi$$

9.

$$2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$$

$$3^x = t$$

$$6t - \frac{4}{9}t = 450$$

$$\left(6 - \frac{4}{9}\right)t = 450$$

$$t = 81$$

$$3^x = 81 \Rightarrow x = 4$$

10.

$$\binom{n}{3} : \binom{n}{5} = 5 : 18$$

$$18 \binom{n}{3} = 5 \binom{n}{5}$$

$$n^2 - 7n - 60 = 0 \Rightarrow n_1 = 12, n_2 = -5$$

$$\left(\frac{1}{a} + \sqrt{a}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{a}\right)^k (\sqrt{a})^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} a^{\frac{12-3k}{2}}$$

$$12 - 3k = 0 \Rightarrow k = 4$$

Član koji ne sadrži  $a$  je  $\binom{12}{4} = 495$ .

1. Proizvod korena jednačine  $-5x^2 + bx + c$  je 12. Parametri  $b$  i  $c$  su realni brojevi. Funkcija  $f(x) = -5x^2 + bx + c$  ima maksimum za  $x = 4$ . Odrediti korene te jednačine.
2. Za koje vrednosti realnog parametra  $k$  će izraz:  $kx^2 - 2k^2x + k^3 - 3k - 4$  biti negativan za svaki realan broj  $x$ ?
3. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu:  $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ .
4. Naći skup rešenja nejednačine:  $\log_x(6 - 5x) < 2$ .
5. Pravougaonik  $ABCD$  ispresecan je sa 6 pravih koje su paralelne sa stranicom  $AB$  i 8 pravih koje su paralelne sa stranicom  $BC$ . Koliko ukupno ima pravougaonika na dobijenoj slici?
6. Neka je  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  geometrijska progresija sa količnikom  $q$  za koju važi da je zbir  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -4$  i da je  $b_4 - b_1 = 7(q-1)^2$ . Izračunati  $b_{2002}$ .
7. Rešiti nejednačinu:  $\sin x - \sqrt{3} \sin 3x + \sin 5x < 0$  za  $x \in (0, \pi)$ .
8. Neka su  $A(1,1,2), B(1,2,3)$  i  $C(-1,1,2)$  temena paralelograma  $ABCD$ . Izračunati koordinate temena  $D$  i težišta  $T$  trougla  $ABC$ .
9. Neka je nad katetama  $OA$  i  $OB$  jednakokrako pravouglog trougla  $OAB$ , kao nad prečnicima konstruisane kružnice  $k_1$  i  $k_2$ .
  - a) Dokazati da tačka  $C$  pripada hipotenuzi  $AB$ , gde su  $O$  i  $C$  presečne tačke kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .
  - b) Izračunati površinu preseka krugova koji su određeni kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ , ako je  $OA=4\text{cm}$ .
10. Izračunati zapreminu lopte upisane u pravilni oktaedar ivice  $a$ .  
(Pravilni oktaedar se sastoji od dve jednakoivične prave pravilne četverostrane piramide koje imaju zajedničku kvadratnu osnovu, a vrhovi tih piramida su sa različitih strana te osnove.)

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

**REŠENJA:**

1.  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{-5} = 12 \Rightarrow c = -60$ .  $f'(x) = -10x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{10} \Rightarrow 4 = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 40$ .  
 $f''(x) = -10 < 0$ . Dakle, za  $x = 4$  funkcija  $f(x)$  ima maksimum. Sledi da su koreni  $x_1 = 2; x_2 = 6$ .
2. Data jednačina je kvadratna ako je  $k \neq 0$ . Za  $k = 0$  vrednost izraza  $f(x) = kx^2 - 2k^2x + k^3 - 3k - 4$  je  $f(x) = -4 < 0$  za svako  $x \in R$ . Za  $k \neq 0$  dati izraz će biti negativan za svako  $x \in R$  ako je  $k < 0$  i  $D = 4k^4 - 4k(k^3 + k^2 - 3k - 4) = -4k(k^2 - 3k - 4) < 0 \Rightarrow k \in (-1, 0)$ . Dakle,  $f(x) < 0$  za svako  $x$  ako  $k \in (-1, 0]$ .
3.  $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x + 9 \cdot (3^x)^2 = 810$ ;  $3^x = t \Rightarrow t^2 + t - 90 = 0 \Rightarrow t_1 = -10, t_2 = 9 \Rightarrow t \in \{-10, 9\} \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$  je rešenje jednačine.

4. Data nejednačina je definisana za  $x > 0, x \neq 1$  i  $6 - 5x > 0$  tj. za

$x \in (0,1) \cup (1, \frac{6}{5})$ . Za  $x > 1$  logaritam je monotono rastuća funkcija pa je

$$\log_x(6 - 5x) < 2 \Leftrightarrow 6 - 5x < x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (1, \infty).$$

Dakle, rešenje je  $x \in (1, \frac{6}{5})$ .

Za  $0 < x < 1$  logaritam je monotono opadajuća funkcija pa je

$$\log_x(6 - 5x) < 2 \Leftrightarrow 6 - 5x > x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 < 0 \Rightarrow x \in (-6, 1).$$

Dakle, rešenje je  $x \in (0, 1)$ . Znači skup rešenja je  $(0, 1) \cup (1, \frac{6}{5})$ .

5. Kako je proizvoljan pravougaonik određen izborom dve prave od horizontalnih ( ima ih 8 ) i dve prave od vertikalnih ( ima ih 6 ) to je broj svih pravougaonika jednak  $\binom{8}{2} \binom{10}{2} = 1260$ .

6.  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \frac{b_1}{1 - q} = -4 \Rightarrow b_1 = -4(1 - q)$ .

$$b_4 - b_1 = b_1 q^3 - b_1 = b_1(q^3 - 1) = b_1(q - 1)(q^2 + q + 1) = 7(q - 1)^2 \Rightarrow b_1 = \frac{7(q - 1)}{q^2 + q + 1}.$$
 Sledi da je

$$b_1 = -2, q = \frac{1}{2} \text{ pa je } b_{2002} = b_1 q^{2001} = -2^{-2000}.$$

7.  $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \sin 3x + \sin 5x = (\sin x + \sin 5x) - \sqrt{3} \sin 3x = \sin 3x(2 \cos 2x - \sqrt{3})$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\pi$
$\sin 3x$	+	+	-	+	+	
$2 \cos x - \sqrt{3}$	+	-	-	-	+	
$f(x)$	+	-	+	-	+	

Dakle, skup rešenja date nejednačine je  $(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{12})$ .

8.  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} = (1, 1, 2) + (-1, 1, 2) - (1, 2, 3) = (-1, 0, 1)$ ;

$$\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}(1, 4, 7).$$
 Dakle, koordinate su  $D(-1, 0, 1); T(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$ .

9. a) Kako su uglovi  $OCA$  i  $OCB$  svaki od  $90^\circ$  to su tačke  $A, C$ , i  $B$  kolinearne;

b) Ako je  $r$  poluprečnik datih krugova to je tražena površina

$$P = \frac{r^2 \pi}{2} - P_{\Delta OCA} = \frac{r^2 \pi}{2} - \frac{1}{2} r \cdot 2r.$$
 Kako je u našem slučaju  $r = 2\text{cm}$  to je

$$P = (2\pi - 4)\text{cm}^2.$$

10. Neka je  $S$  centar upisane lopte u oktaedar  $ABCDV V'$ , tj. presek dijagonala  $AC$  i  $BD$  kvadrata  $ABCD$  i neka je  $T$  normalna projekcija tačke  $S$  na ravan trougla  $BCV$  (kako je u pitanju pravilni oktaedar to tačka  $T$  mora da bude baš težište trougla  $BCV$ ). Sa  $r$  označimo poluprečnik upisane lopte Ako je  $P$  sredina ivice  $BC$  tada iz pravouglog trougla  $STP$  sledi da je

$$r^2 = ST^2 = SP^2 - PT^2 = \frac{a^2}{4} - (\frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 \text{ tj. } r = \frac{a\sqrt{6}}{6}, \text{ pa je zapremina tražene lopte}$$

$$V = \frac{1}{27} a^3 \sqrt{6} \pi.$$

1. U skupu realnih brojeva uprostiti izraz:

$$\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}, \text{ za } x = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$$

$$\text{a) } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{b) } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (8)$$

bodova)

2. U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu

$$\frac{7}{x^2 - 5x + 6} + \frac{9}{x - 3} < -1 \quad (5 \text{ bodova})$$

3. U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$3^{2x} - 2^y = 77 \wedge 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7. \quad (4 \text{ bodova})$$

4. Naći skup rešenja sistema jednačina

$$\log_2 x - \log_4 y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4. \quad (5 \text{ bodova})$$

5. Na koliko različitih načina se od prvih 27 uzastopnih prirodnih brojeva, mogu odabrati tri broja, tako da njihov zbir bude deljiv sa 3?

(7 bodova)

6. Odrediti
- $x$
- tako da brojevi
- $\frac{1}{\log_3 5}, \frac{1}{\log_6 5}, \frac{1}{\log_x 5}$
- obrazuju aritmetičku progresiju. (4 bodova)

7. U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu

$$\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0. \quad (6 \text{ bodova})$$

8. Neka su
- $P$
- i
- $Q$
- sredine redom stranica
- $BC$
- i
- $CD$
- paralelograma
- $ABCD$
- , neka je
- $R$
- presek duži
- $AP$
- i
- $BQ$
- i neka je
- $\vec{a} = \vec{AB}$
- ,
- $\vec{b} = \vec{BC}$
- .

$$\text{a) Izračunati } \varphi \text{ i } \psi \text{ ako je } \varphi \vec{a} + \psi \vec{b} = 0; \quad (2 \text{ bodova})$$

$$\text{b) Ako je } \vec{PR} = \alpha \vec{PA} \text{ i } \vec{RB} = \beta \vec{QB}, \text{ tada izraziti vektore } \vec{BP}, \vec{PR} \text{ i } \vec{RB} \text{ u zavisnosti od vektora } \vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ i skalara (realnih brojeva) } \alpha \text{ i } \beta; \quad (2 \text{ bodova})$$

$$\text{c) Izračunati } \alpha \text{ i } \beta \text{ i } AR:RP, \text{ koristeći zbir } \vec{BP} + \vec{PR} + \vec{RB} \quad (4 \text{ bodova})$$

9. Izračunati površinu trapeza
- $ABCD$
- čije osnovice su
- $AB=8$
- i
- $CD=4$
- , a uglovi na osnovici su
- $\alpha = \frac{\pi}{4}$
- i

$$\beta = \frac{\pi}{6}. \quad (6 \text{ bodova})$$

10. Izračunati zapreminu pravilnog tetraedra, ako mu je rastojanje između sredina dve naspramne ivice
- $\sqrt{2}$
- . (7 bodova)

**REŠENJA:**

$$1. \frac{\sqrt{1 + \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} - \sqrt{1 - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}}{\sqrt{1 + \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} + \sqrt{1 - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}} = \frac{|\operatorname{tg}\alpha + 1| - |\operatorname{tg}\alpha - 1|}{|\operatorname{tg}\alpha + 1| + |\operatorname{tg}\alpha - 1|}.$$

$$\text{Ako je } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \text{ tada je } \operatorname{tg}\alpha \in [-1, 1], \text{ pa je } \frac{|\operatorname{tg}\alpha + 1| - |\operatorname{tg}\alpha - 1|}{|\operatorname{tg}\alpha + 1| + |\operatorname{tg}\alpha - 1|} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\text{Ako je } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right], \text{ tada je } \operatorname{tg}\alpha \in (-\infty, -1], \text{ pa je } \frac{|\operatorname{tg}\alpha + 1| - |\operatorname{tg}\alpha - 1|}{|\operatorname{tg}\alpha + 1| + |\operatorname{tg}\alpha - 1|} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

Ako je  $\alpha \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$ , tada je  $\operatorname{tg} \alpha \in [1, \infty)$ , pa je  $\frac{|\operatorname{tg} \alpha + 1| - |\operatorname{tg} \alpha - 1|}{|\operatorname{tg} \alpha + 1| + |\operatorname{tg} \alpha - 1|} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ .

$$2. \quad \frac{7}{x^2 - 5x + 6} + \frac{9}{x - 3} < -1 \Leftrightarrow \frac{(x+5)(x-1)}{(x-2)(x-3)} < 0 \Rightarrow x \in (-5, 1) \cup (2, 3).$$

3. Smenom  $3^x = u$ ,  $2^{\frac{y}{2}} = v$  dati sistem se svodi na ekvivalentan sistem  $u^2 - v^2 - 77 \wedge u - v = 7$ . Deljenjem ovih jednačina dobija se  $u + v = 11 \wedge u - v = 7$ , pa je  $(u, v) = (9, 2)$  odnosno  $(x, y) = (2, 2)$ .

$$4. \quad \log_2 x - \log_4 y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 x - \log_{2^2} y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 1), (2, 4)\}.$$

5. Podelimo tih 27 brojeva u tri grupe po 9 brojeva tako da su u prvoj grupi svi brojevi koji su deljivi sa 3, u drugoj grupi su brojevi koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 1 i u trećoj grupi svi brojevi koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 2. Da bi zbir tri izabrana broja bio deljiv sa tri moraju ti brojevi da budu u istoj grupi ili sva tri broja treba da budu iz različitih grupa. U prvom slučaju ima ih ukupno  $3 \cdot \binom{9}{3}$ , a

u drugom slučaju ima ih ukupno  $9^3$ , te je rezultat da ih ima ukupno  $3 \cdot \binom{9}{3} + 9^3 = 981$ .

6. Kako važi  $\frac{1}{\log_3 5} = \log_5 3$ ,  $\frac{1}{\log_6 5} = \log_5 6$ ,  $\frac{1}{\log_x 5} = \log_5 x$  to iz uslova da oni tim redom obrazuju aritmetičku progresiju sledi da je  $2 \log_5 6 = \log_5 3 + \log_5 x = \log_5 3x \Rightarrow x = 12$ .

7. Kako je  $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \in (1, \sqrt{3})$  to je rešenje date nejednačine nad intervalom  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  interval  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ , a nad celim skupom realnih brojeva unije svih intervala oblika  $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$ , gde  $k$  prolazi kroz skup celih brojeva.

8. a) Kako su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nekolinearni to važi

$$\varphi \vec{a} + \psi \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \wedge \psi = 0;$$

$$b) \quad \vec{BP} = \frac{1}{2} \vec{b}, \vec{PR} = \alpha \left(-\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a}\right), \vec{RB} = \beta \left(\frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b}\right);$$

$$c) \quad \vec{BP} + \vec{PR} + \vec{RB} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \vec{b} + \alpha \left(-\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a}\right) + \beta \left(\frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\alpha + \frac{1}{2} \beta\right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta\right) \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \frac{1}{2} \beta = 0 \wedge \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5} \wedge \beta = \frac{2}{5}.$$

Sledi da je  $AR : RP = 4 : 1$

9. Ako su  $E$  i  $F$  redom normalne projekcije tačaka  $D$  i  $C$  na osnovicu  $AB$  i ako je  $DE = CF = h$ , tada je  $AB = AE + EF + FB = h + 4 + h\sqrt{3} = 8$ , odakle sledi da je  $h = 2\sqrt{3} - 2$ , te je tražena površina

$$P = \frac{8+4}{2} \cdot 2(\sqrt{3} - 1) = 12(\sqrt{3} - 1).$$

10. Ako sa  $M$  i  $N$  označimo redom sredine ivica  $AB$  i  $CD$  tetraedra  $ABCD$  a sa  $a = AB$  to iz pravouglog trougla  $AMN$  sledi da je

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{1}{2} a \sqrt{3}\right)^2 \text{ odnosno da je } a = 2. \text{ Sledi da je zapremina tetraedra jednaka}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

- U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu:  $\frac{2x^2 - 2x - 1}{2x + 1} \leq 4$ .
- Za koje vrednosti realnih brojeva  $a$  i  $b$  jednačina  $ax^2 - x + b = 0$  ima tačno jedno rešenje  $x = x_0$  za koje važi  $2x_0 = x_0^2$ .
- U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu  $\operatorname{tg} x(2 - \sin x) = \frac{3}{4 \cos x}$ .
- U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu  $\log_2(x + 1) = \log_4(x + 3)$ .
- U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina  $2^x \cdot 3^{y-2} = 4$ ;  $2^x + \sqrt{3^{2y}} = 13$ .
- Data je kocka sa temenima  $A(0,0,0)$ ;  $B(1,0,0)$ ;  $C(1,1,0)$ ;  $D(0,1,0)$ ;  $A_1(0,0,1)$ ;  $B_1(1,0,1)$ ;  $C_1(1,1,1)$ ;  $D_1(0,1,1)$ .
  - Izračunati ugao između vektora  $\vec{AB}_1$  i  $\vec{A_1C_1}$ ;
  - Izračunati skalarni proizvod vektora  $\vec{AB}_1$  i  $\vec{A_1C_1}$ ;
  - Izračunati koordinate težišta  $T$  trougla  $ACB_1$ .
- Date su tačke  $A(1,1)$ ;  $B(2,1)$ ;  $C(2,1+\sqrt{3})$  i kružnica  $K$  čija je jednačina  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ . Odrediti jednačine onih tangenti kružnice  $K$  koje su paralelne sa simetralom unutrašnjeg ugla kod temena  $A$  trougla  $ABC$ .
- Da li postoji geometrijski niz  $\{b_n\}$  kod koga je  $\frac{1}{3}(b_1 + b_3 + b_4) = \frac{1}{2}(b_2 + b_4)$ ? Odgovor obrazložiti.
- Dokazati da za svaki prirodan broj  $n$ , broj  $10 \cdot 3^{2n+1} - 24n - 30$  deljiv sa 24.
- Košarkaški klub  $A$  ima na raspolaganju 8 igrača, a košarkaški klub  $B$  ima na raspolaganju 9 igrača. Svaki od klubova za utakmicu bira prvu postavu od 5 košarkaša. Koliko ima različitih načina da 10 igrača izađe na parket? .

**Svaki zadatak nosi 6 bodova**

### REŠENJA:

- Data nejednačina je definisana za  $x \neq -\frac{1}{2}$ .
 
$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{2x + 1} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x - 1}{2x + 1} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 10x - 5}{2x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5 - \sqrt{35}}{2}, \frac{5 + \sqrt{35}}{2}\right].$$
- Rešenja kvadratne jednačine  $2x_0 = x_0^2$  su brojevi  $x_{01} = 0$ ;  $x_{02} = 2$ . Uvrštavanjem  $x_{01} = 0$  u jednačinu  $ax^2 - x + b = 0$  dobija se da je  $b = 0$  i tada je  $ax^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(ax - 1) = 0$ , pa kako je  $x_{01} = 0$  jedino rešenje te jednačine, sledi da mora da bude  $a = 0$ . Uvrštavanjem  $x_{02} = 2$  u jednačinu  $ax^2 - x + b = 0$  dobija se da je  $4a - 2 + b = 0$  odnosno  $b = 2 - 4a$ , pa data jednačina sada glasi  $ax^2 - x + 2 - 4a = 0$ . Kako je  $x_{02} = 2$  jedino rešenje sledi da mora da bude ili  $a = 0 \wedge b = 2$  ili

$a \neq 0; x_1 + x_2 = \frac{1}{a} = 4; x_1 \cdot x_2 = \frac{2-4a}{a} = 4$ . Sledi da je u ovom slučaju  $a = \frac{1}{4}; b = 1$ . Dakle, rešenje je  $a = b = 0 \vee (a = 0 \wedge b = 2) \vee (a = \frac{1}{4} \wedge b = 1)$ .

3. Data jednačina definisana je za  $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z \right\}$ .

$$\operatorname{tg} x(2 - \sin x) = \frac{3}{4 \cos x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}(2 - \sin x) = \frac{3}{4 \cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = \frac{3}{2}. \text{ Skup rešenja jednačine } \sin x = \frac{1}{2} \text{ je}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z \right\}, \text{ dok jednačina } \sin x = \frac{3}{2} \text{ nema rešenja. Dakle, skup rešenja}$$

$$\text{polazne jednačine je } \left\{ \frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z \right\}.$$

4. Data jednačina je definisana za  $x > -1$ .

$$\log_2(x+1) = \log_4(x+3) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) = \frac{1}{2} \log_2(x+3) \Leftrightarrow \log_2(x+1)^2 = \log_2(x+3) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = x+3 \Rightarrow x = -2 \vee x = 1$ . Rešenje polazne jednačine je samo realan broj  $x=1$ , dok realan broj  $x=-2$  nije rešenje, jer data jednačina je definisana za  $x > -1$ .

5. Smenom  $2^x = u, 3^y = v$  dati sistem se svodi na ekvivalentan sistem  $u \cdot v = 36; u + v = 13$ , sa rešenjima  $(u, v) \in \{(4, 9), (9, 4)\}$ , odnosno sa rešenjima  $(x, y) \in \{(2, 2), (\log_2 9, \log_3 4)\}$ .

6. a) Ako sa  $\alpha$  označimo ugao između vektora  $\vec{AB}_1 = \vec{OB}_1 - \vec{OA} = (1, 0, 1) - (0, 0, 0) = (1, 0, 1)$  i  $\vec{A}_1\vec{C}_1 = \vec{OC}_1 - \vec{OA}_1 = (1, 1, 1) - (0, 0, 1) = (1, 1, 0)$  to iz  $|\vec{AB}_1| = |\vec{A}_1\vec{C}_1| = \sqrt{2}$ , sledi da si

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB}_1 \cdot \vec{A}_1\vec{C}_1}{|\vec{AB}_1| |\vec{A}_1\vec{C}_1|} = \frac{1}{2} \text{ odnosno } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{b) } \vec{AB}_1 \cdot \vec{A}_1\vec{C}_1 = (1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1.$$

$$\text{c) } \vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB}_1) = \frac{1}{3}((0, 0, 0) + (1, 1, 1) + (1, 0, 1)) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

7. Kako prava  $b=p(A, B)$  čija je jednačina  $y=1$  zaklapa ugao  $\theta$  sa pozitivnim delom  $x$ -ose, a prava  $c=p(A, C)$  čija je jednačina  $y = \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3}$  zaklapa ugao  $\frac{\pi}{3}$  sa pozitivnim delom  $x$ -ose, to tangente treba sa pozitivnim delom  $x$ -ose da zaklapaju ugao  $\frac{\pi}{6}$ . Dakle, tangente treba da imaju

koeficijent pravca  $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Da bi prava  $p: y=kx+n$  bila tangenta kružnice

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ , treba da važi uslov dodira  $r^2(1+k^2) = (kx_0 - y_0 + n)^2$ . Uvrštavajući

$k = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_0 = 1, y_0 = 0, r = 1$  u uslov dodira dobija se da je  $n_1 = -\sqrt{3}, n_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Dakle, tražene

tangente su prave  $t_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}; t_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

8. Pretpostavimo da postoji geometrijski niz  $\{b_n\}$ . Na osnovu uslova treba da važi  $\frac{1}{3}(b_1 + b_3 + b_4) = \frac{1}{2}(b_2 + b_4) \Leftrightarrow \frac{b_1}{3}(1 + q + q^2) = \frac{b_1}{2}(q + q^2)$ . Ako je  $b_1 = 0$ , to sledi da stacionaran niz  $\{b_n : b_n = 0, n \in \mathbb{N}\}$  ispunjava dati uslov. Dalje, ako je  $b_1 \neq 0$  sledi iz  $\frac{b_1}{3}(1 + q + q^2) = \frac{b_1}{2}(q + q^2) \Leftrightarrow 0 = (q - 1)(q^2 - q + 2) \Rightarrow q = 1$ . Sledi da su jedini realni geometrijski nizovi koji ispunjavaju dati uslov stacionarni nizovi, tj. nizovi oblika  $\{b_n : b_n = b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ .
9. Tvrdjenje je tačno za  $n = 1$ , jer je broj  $10 \cdot 3^2 - 24 - 30 = 24 \cdot 9$  deljiv sa  $24$ .  
 Pretpostavimo da tvrdjenje važi za  $n = k$ , tj. da je broj  $10 \cdot 3^{2k+1} - 24k - 30$  deljiv sa  $24$ . Potrebno je dokazati da tvrdjenje važi i za  $n = k + 1$ , tj. da je broj  $10 \cdot 3^{2k+3} - 24(k + 1) - 30$  deljiv sa  $24$ .  
 Kako je:  $10 \cdot 3^{2k+3} - 24(k + 1) - 30 = 9 \cdot 10 \cdot 3^{2k+1} - 9 \cdot 24k + 8 \cdot 24k - 9 \cdot 30 + 216 =$   
 $= 9 \cdot (10 \cdot 3^{2k+1} - 24k - 30) + 24 \cdot (8k + 9)$   
 i  $10 \cdot 3^{2k+1} - 24k - 30 = 24M$  po pretpostavci, to je  
 $10 \cdot 3^{2k+3} - 24(k + 1) - 30 = 24 \cdot (9M + 8k + 9)$ . Dakle, po principu matematičke indukcije, dati broj je deljiv sa  $24$  za svaki prirodan broj.
10. Klub  $A$  prvu postavu može izabrati na  $\binom{8}{5}$  načina, a klub  $B$  prvu postavu može izabrati na  $\binom{9}{5}$  načina. Dakle, utakmica može da započne na  $\binom{8}{5} \cdot \binom{9}{5} = 56 \cdot 125 = 7056$  načina.

1. Odrediti oblast definisanosti i izračunati nulu funkcije  $f(x) = \sqrt{\frac{\log_2(x^2 - 5x + 5)}{x + 2}}$ .
2. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja (koreni) u skupu kompleksnih brojeva kvadratne jednačine  $x^2 - px + q = 0$ . Izračunati realne brojeve  $p$  i  $q$  tako da važi
 
$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = p \quad \text{i} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = q.$$
3. Rešiti jednačinu  $25^x - 6 \cdot 5^x - 16 = 0$ .
4. Data je jednačina  $\Im: |\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .
  - a) rešiti po  $x$  jednačinu  $\Im$  na intervalu  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;
  - b) rešiti po  $x$  jednačinu  $\Im$  na intervalu  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .
5. Dati su vektori  $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$  i  $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$ , gde je  $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$  i  $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$ 
  - a) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$
  - b) Izračunati intezitet vektora  $\vec{a}$
  - c) Ispitati da li su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  normalni.
6. Izračunati površinu romba čija je stranica  $a = 9$ , a razlika dijagonala  $d_1 - d_2 = 2$ .
7. Za kompleksne brojeve  $z = -1 + i$  i  $w = \sqrt{3} - i$  izračunati
  - a)  $z + w$
  - b)  $z \cdot w$
  - c)  $\frac{z}{w}$
  - d)  $\arg(z)$
  - e)  $|z|$
  - f)  $\sqrt{z}$
8. Dat je binom  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$ .
  - a) da li postoji  $n \in \mathbb{N}$  za koje prva tri binomna koeficijenta u razvijenom obliku binoma obrazuju tri uzastopna člana nekog aritmetičkog niza?
  - b) Za  $n=23$  odrediti binomni koeficijent uz  $x^4$  u razvijenom obliku binoma.
9. Koliko ima različitih 5-cifrenih brojeva (prva cifra je različita od 0) koji među svojim ciframa sadrže bar jednu cifru 1?
10. Data je funkcija  $f(x) = xe^{x^2}$ .
  - a) Izračunati  $y_0$  za koju tačka  $A(1, y_0)$  pripada grafiku date funkcije.
  - b) Naći jednačinu tangente u tački  $O(0,0)$  grafika date funkcije.
  - c) Ispitati monotoniju i ekstremne vrednosti date funkcije.

**Svaki zadatak nosi 6 bodova**

**REŠENJA:**

1. Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan, imenilac u razlomku mora biti različit od 0, a potkorena veličina mora biti negativna:

$$\begin{aligned} & \left( x^2 - 5x + 5 > 0 \quad \wedge \quad x + 2 \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{\log_2(x^2 - 5x + 5)}{x + 2} \geq 0 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( x \in \left( -\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \infty \right) \wedge x \neq -2 \quad \wedge \right. \\ & \quad \left. \left( \left( \log_2(x^2 - 5x + 5) \geq 0 > -2 \right) \vee \left( \log_2(x^2 - 5x + 5) \leq 0 \wedge x < -2 \right) \right) \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( x \in \left( -\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \infty \right) \wedge x \neq -2 \quad \wedge \quad (x \in (-2, 1]) \cup [4, \infty) \quad \vee \quad x \notin \emptyset \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x \in (-2, 1]) \cup [4, \infty). \end{aligned}$$

Dakle, domen funkcije je  $D = (-2, 1] \cup [4, \infty)$ . Za  $x \in D$  je

$$\begin{aligned} f = 0 & \Leftrightarrow \frac{\log_2(x^2 - 5x + 5)}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 4\} \subseteq D \end{aligned}$$

Dakle, funkcija  $f$  ima dve nule:  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 4$ .

2. Za rešenja  $x_1$  i  $x_2$  kvadratne jednačine  $J: x^2 + px + q = 0$  važe Vietove formule

$$[V1]: x_1 + x_2 = -p \qquad [V2]: x_1 x_2 = q.$$

Iz  $[U2]: \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = q$  sledi da mora biti  $x_1 \neq 0$  i  $x_2 \neq 0$ , te je  $I \ q = x_1 x_2 \neq 0$ . Pri tome je

$$q = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \stackrel{[V1], [V2]}{=} \frac{-p}{q}, \text{ odakle sledi } p = -q^2 \neq 0[*].$$

Dalje je

$$\begin{aligned} [U1]: p &= \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{q} = \\ &= \frac{-p(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 x_2)}{q} = \frac{-p((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2)}{q} = \frac{-p(p^2 - 3q)}{q}, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$1 = \frac{3q - p^2}{q} \stackrel{[*]}{=} \frac{3q - q^4}{q} = 3 - q^3 \Leftrightarrow q^3 = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt[3]{2},$$

a uvrštavanjem zadnje jednakosti u  $[*]$  dobijamo  $p = -\sqrt[3]{4}$ . Dakle, zadatak ima jedno rešenje:

$$p = -\sqrt[3]{4} \wedge q = \sqrt[3]{2}.$$

3. Kako je  $25^x = (5^x)^2$ , smenom  $t = 5^x$  dobijamo da je jednačina ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} (t = 5^x \wedge t^2 - 6t - 16 = 0) &\Leftrightarrow (t = 5^x \wedge t_{1,2} = \frac{6 \pm 10}{2} = \{-2, 8\}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (5^x = -2 \vee 5^x = 8) \Leftrightarrow x = \log_5 8. \end{aligned}$$

4. Funkcije  $\operatorname{tg} x$  i  $\operatorname{ctg} x$  su definisane za svako  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  i svako  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

- (a) Na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  su pozitivne obe funkcije  $\operatorname{tg} x$  i  $\operatorname{ctg} x$ , te je na  $(0, \frac{\pi}{2})$  pozitivna i funkcija  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ . Stoga je za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  jednačina  $\mathfrak{S}$  ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} / \cdot \operatorname{ctg} x &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( t = \operatorname{tg} x \wedge t^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} t + 1 = 0 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( t = \operatorname{tg} x \wedge \left( t = \sqrt{3} \vee t = \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( x = \frac{\pi}{3} \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) \vee x = \frac{\pi}{6} \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

- (b) Na intervalu  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  su negativne obe funkcije  $\operatorname{tg} x$  i  $\operatorname{ctg} x$ , te je na  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  negativna i funkcija  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ . Stoga je za  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  jednačina  $J$  ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} -\left( \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = -\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} / \cdot \operatorname{ctg} x &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \left( t = \operatorname{tg} x \wedge t^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} t + 1 = 0 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( t = \operatorname{tg} x \wedge \left( t = -\sqrt{3} \vee t = \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \vee \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( x = \frac{2\pi}{3} \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) \vee x = \frac{5\pi}{6} \in \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right) \right). & \end{aligned}$$

5. a) Po definiciji vektorskog proizvoda, površina paralelograma je

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |(\vec{p} - 3\vec{q}) \times (\vec{p} + 2\vec{q})| = |\vec{p} \times \vec{p} + 2\vec{p} \times \vec{q} - 3\vec{q} \times \vec{p} - 6\vec{q} \times \vec{q}| = \\ &= |\vec{0} + 2\vec{p} \times \vec{q} + 3\vec{p} \times \vec{q} - 6 \cdot \vec{0}| = |5\vec{p} \times \vec{q}| = 5|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \sin(\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q})) = \\ &= 20 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 10\sqrt{3}. \end{aligned}$$

- b)

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (\vec{p} - 3\vec{q})} = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} - 3\vec{p} \cdot \vec{q} - 3\vec{q} \cdot \vec{p} + 9\vec{q} \cdot \vec{q}} = \\ &= \sqrt{|\vec{p}|^2 - 6\vec{p} \cdot \vec{q} + 9|\vec{q}|^2} = \sqrt{40 - 6|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}))} = \sqrt{40 - 24 \cdot \cos \frac{\pi}{3}} = \\ &= \sqrt{40 - 12} = 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

c) Kako je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (\vec{p} + 2\vec{q}) = \vec{p} \cdot \vec{p} + 2\vec{p} \cdot \vec{q} - 3\vec{p} \cdot \vec{q} - 6\vec{q} \cdot \vec{q} = |\vec{p}|^2 - \vec{p} \cdot \vec{q} - 6|\vec{q}|^2 =$$

$$= 4 - |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos(\angle(\vec{p}, \vec{q})) - 24 = -22 \neq 0,$$

sledi da vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nisu ortogonalni.

6. Dijagonale romba se seku pod pravim uglom, te na osnovu Pitagorine teoreme sledi

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2 = 81$$

$$d_1 - d_2 = 2 \quad \begin{matrix} d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2 = 4 \\ d_1^2 + d_2^2 = 324 \end{matrix} \quad \text{te uvrštavanjem druge jednakosti u prvu dobijamo}$$

$$2d_1d_2 = 320, \text{ odakle sledi da je površina romba } P = \frac{d_1d_2}{2} = 80.$$

7. Za kompleksne brojeve  $z = -1 + i$  i  $w = \sqrt{3} - i$  izračunati

a)  $z + w = \sqrt{3} - 1$

b)  $z \cdot w = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$

c)  $\frac{z}{w} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + i\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

d)  $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

e)  $|z| = \sqrt{2}$

f)  $\sqrt{z} = \left\{ \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi i}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi i}{8}} \right\} = \left\{ \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi i}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi i}{8}} \right\}$

8. a) Binomni koeficijenti  $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n$  i  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  obrazuju tri uzastopna člana nekog aritmetičkog niza ako i samo ako je srednji jednak aritmetičkoj sredini prvog i trećeg:

$$n = \frac{1 + \frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{4} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( n = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \notin \mathbb{N} \vee n = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \notin \mathbb{N} \right)$$

što znači da ne postoji takav prirodan broj  $n$ .

b)  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{23} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{23} = \sum_{k=0}^{23} \binom{23}{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{23-k} \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^k = \sum_{k=0}^{23} \binom{23}{k} x^{\frac{23-3k}{4}}$  pri čemu je

$$x^{\frac{23-3k}{4}} = x^4 \Leftrightarrow \frac{23-3k}{4} = 4 \Leftrightarrow k = 10$$

Dakle, radi se o binomnom koeficijentu  $\binom{23}{10}$ . Polazeći od

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{23} = \sum_{k=0}^{23} \binom{23}{k} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^k \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{23-k}$$

se na isti način dobija binomni koeficijent  $\binom{23}{13} = \binom{23}{10}$ .

9. Ukupno, različitih 5-cifrenih brojeva ima  $9 \cdot 10^4 = 90000$  (prva cifra ne može biti 0).  
 Različitih 5-cifrenih brojeva koji među svojim ciframa **ne sadrže** ni jednu cifru 1 ima  $8 \cdot 9^4 = 52488$  (prva cifra ne može biti ni 0 ni 1, a ostale su različite od 1).  
 Prema tome, različitih 5-cifrenih brojeva koji među svojim ciframa sadrže bar jednu cifru 1 ima  $90000 - 52488 = 37512$ .
10. (a) Iz  $f(1) = 1 \cdot e^1 = e$  sledi  $y_0 = e$ .  
 (b) Na isti način kao pod (a) se proverava da  $O(0,0)$  pripada grafiku date funkcije. Iz  $f'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} (2x^2 + 1)$  sledi  $f'(0) = 1 \cdot (0+1) = 1$ , te je koeficijent pravca tangente u tački  $O$  jednak 1, odnosno tangenta u tački  $O$  je oblika  $y = x + n$ . Kako tangenta treba da prolazi kroz koordinatni početak  $O$ , sledi  $n = 0$ , te tražena tangenta ima jednačinu  $y = x$ .  
 (c) Za svako  $x \in \mathbb{R}$  je  $e^{x^2} > 0$  i  $2e^{x^2} + 1 > 0$ , te je  $f'(x) > 0$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ . To znači da je funkcija  $f$  strogo monotono rastuća na celom skupu  $\mathbb{R}$  i nema ni tačku minimuma ni tačku maksimuma

1. Ako su  $x_1$  i  $x_2$  koreni (rešenja) kvadratne jednačine  $x^2 + px + q = 0$ , za koje važi jednakost  $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ , odrediti skup uređenih parova realnih brojeva  $(p, q)$  za koje su koreni date jednačine realni brojevi.

2. a) Rešiti po  $x$  jednačinu  $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$ .

b) Odrediti oblast definisanosti funkcije  $y = f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 1}{x + 3}}$ .

3. a) Odrediti sva rešenja jednačine  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ .

b) Rešiti nejednačinu  $\sqrt{3} \sin x + \cos x < 0$ .

4. Date su funkcije  $f_1(x) = 2 \log_2 x$ ,  $f_2(x) = \log_2 x^2$ ,  $f_3(x) = 2 \log_2 |x|$ ,  $f_4(x) = \frac{2}{\log_x 2}$ .

Ako među datim funkcijama ima jednakih, napisati koje su jednake. Odgovore obrazložiti.

5. a) Dat je pravilan šestougao  $ABCDEF$  stranice  $a$  sa centrom u tački  $O$ . Ako je  $\overline{AO} = \overline{m}$  i  $\overline{AB} = \overline{n}$ , izraziti vektore  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AE}$  preko vektora  $\overline{m}$  i  $\overline{n}$ .

b) Ako je  $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$ , gde je  $|\vec{p}| = 2$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$ ,

(1) odrediti površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

(2) proveriti da li su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  normalni.

6. Površina romba je  $P_r = 18$ , a jedan od njegovih uglova je  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom romba oko njegove stranice.

7. Odrediti sve vrednosti za:

a)  $\sqrt[4]{1}$  u skupu realnih brojeva,

b)  $\sqrt[4]{1}$  u skupu kompleksnih brojeva,

c) rešenja jednačine  $x^4 - 1 = 0$  u skupu realnih brojeva,

d) rešenja jednačine  $x^4 - 1 = 0$  u skupu kompleksnih brojeva,

e) rešenja jednačine  $\frac{x^4 - 1}{x - 1} = 0$  u skupu realnih brojeva,

f) rešenja jednačine  $\frac{x^4 - 1}{x - 1} = 0$  u skupu kompleksnih brojeva.

8. a) Izračunati  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$ .

b) Dokazati da za binomne koeficijente (iz binomnog obrasca) za svaki prirodan broj  $n$  važi

$$\text{jednakost: } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

9. Data je funkcija  $y = f(x) = x^3 - 3x - 1$ .

a) Odrediti ekstremne vrednosti funkcije  $f(x)$ .

b) Neka je  $s$  sečica koja prolazi kroz tačke  $A(-1, y_1)$  i  $B(2, y_2)$  grafika funkcije  $f$ . Odrediti jednačinu tangente  $t$  grafika funkcije  $f$  paralelne sa sečicom  $s$ . Odrediti jednačinu normale  $n$  u dodirnoj tački tangente  $t$ .

10. Koliko ima različitih 7-cifrenih brojeva čije su prve 3 cifre različiti neparni brojevi, a poslednje 4 cifre su parni brojevi?

### REŠENJA:

1. Na osnovu Vietovih pravila je  $x_1 \cdot x_2 = q$  i  $x_1 + x_2 = -p$ , te iz jednakosti  $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$  sledi  $q = -p$ . Da bi rešenja kvadratne jednačine bila realna, diskriminanta te jednačine mora biti nenegativna:

$$p^2 - 4q \geq 0 \Leftrightarrow p^2 + 4p \geq 0 \Leftrightarrow p(p+4) \geq 0 \Leftrightarrow (p \leq -4 \vee 0 \leq p) \Leftrightarrow p \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$$

**Zaključak:** rešenja kvadratne jednačine su realni brojevi za  $(p, q) = \{(t, -t) \mid t \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)\}$ .

2. a) Kako je  $9^x = 3^{2x}$ , uvođenjem smene  $t = 3^x$  dobijamo kvadratnu jednačinu  $t^2 - 8t - 9 = 0$ , čija su rešenja  $t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \{-1, 9\}$ . Vraćanjem smene dobijamo da jednačina  $3^x = -1$  nema rešenja, a rešenje jednačine  $3^x = 9 = 3^2$  je  $x = 2$ .

**Zaključak:** rešenje jednačine je  $x = 2$ .

- b) Oblast definisanosti funkcije  $f$  su oni  $x \in \mathbb{R}$  za koje je

$$x \neq -3 \wedge \frac{x^2 + 1}{x + 3} > 0 \wedge \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 1}{x + 3} \geq 0,$$

odnosno

$$x \neq -3 \wedge \frac{x^2 + 1}{x + 3} > 0 \wedge \frac{x^2 + 1}{x + 3} \leq 1.$$

- Kvadratna funkcija  $x^2 + 1$  je pozitivna za sve  $x$  te je  $\frac{x^2 + 1}{x + 3} > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$ .

- Kako je  $\frac{x^2 + 1}{x + 3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x + 3} \leq 0$ , a nule kvadratne funkcije  $x^2 - x - 2$  su  $x = -1$  i  $x = 2$ , sledi da je

	-3	-1	2	
$x^2 - x - 2$	+	+	-	+
$x + 3$	-	+	+	+
$\frac{x^2 - x - 2}{x + 3}$	-	+	-	+

te je  $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup [-1, 2]$ .

**Zaključak:** oblast definisanosti funkcije  $f$  su tačke  $x \in [-1, 2]$ .

3. a) Primenom trigonometrijskih identiteta  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  i  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  na prvi i treći sabirak dobijamo

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + 2 \sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(1 + 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow (2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}).$$

**Zaključak:** rešenja jednačine su

$$x \in \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Prvi način:

- Za  $\cos x = 0$  tj.  $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  uvrštavanjem dobijamo da  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  nisu, a  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  jesu rešenja nejednačine.
- Za  $\cos x > 0$ , tj.  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ , deljenjem nejednačine sa  $\cos x$  dobijamo  $\sqrt{3} \sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  
a za  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$  je poslednja nejednakost tačna kada  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .
- Za  $\cos x < 0$ , tj.  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ , deljenjem nejednačine sa  $\cos x$  dobijamo  $\sqrt{3} \sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  
a za  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$  je poslednja nejednakost tačna kada  $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ , odnosno  $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

**Zaključak:** rešenja nejednačine su  $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

(što je isto što i  $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ).

Drugi način:  $\sqrt{3} \sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x < 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) < 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

4. Ako domene funkcija  $f_1, f_2, f_3, f_4$  obeležimo redom sa  $D(f_1), D(f_2), D(f_3), D(f_4)$ , tada je

$$D(f_1) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty), D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty),$$

$$D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), D(f_4) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Stoga, eventualno mogu biti jednake samo funkcije  $f_2$  i  $f_3$ . Kako za  $x > 0$  važi  $\log_2 x^2 = 2 \log_2 |x| \Leftrightarrow \log_2 x^2 = 2 \log_2 x$  i kako su funkcije  $f_2$  i  $f_3$  parne, sledi da su i jednake.

**Zaključak:** Od datih funkcija, jednake su samo  $f_2$  i  $f_3$ .

5. a)  $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{AO} + \overline{AB} = \overline{m} + \overline{n}$ ,  
 $\overline{BC} = \overline{AO} = \overline{m}$ ,  
 $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 2\overline{AO} - \overline{ED} = 2\overline{AO} - \overline{AB} = 2\overline{m} - \overline{n}$ .

**Zaključak:**  $\overline{AC} = \overline{m} + \overline{n}, \overline{BC} = \overline{m}, \overline{AE} = 2\overline{m} - \overline{n}$ .

b)

1. Po definiciji vektorskog proizvoda, površina paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je jednaka intenzitetu vektorskog proizvoda vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , te koristeći definiciju i osobine vektorskog proizvoda dobijamo

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (3\vec{p} + \vec{q}) \times (2\vec{p} - \vec{q}) = 6\vec{p} \times \vec{p} - 3\vec{p} \times \vec{q} + 2\vec{q} \times \vec{p} - \vec{q} \times \vec{q} = \\ &= 6\vec{0} - 3\vec{p} \times \vec{q} - 2\vec{p} \times \vec{q} - \vec{0} = -5\vec{p} \times \vec{q}\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |-5\vec{p} \times \vec{q}| = 5|\vec{p} \times \vec{q}| = 5|\vec{p}||\vec{q}|\sin(\angle(\vec{p}, \vec{q})) = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

**Zaključak:** površina paralelograma je 15.

2. Vektori su normalni ako i samo ako je njihov skalarni proizvod 0. Korišćenjem definicije i osobina skalarnog proizvoda dobijamo

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (3\vec{p} + \vec{q}) \cdot (2\vec{p} - \vec{q}) = 6\vec{p} \cdot \vec{p} - 3\vec{p} \cdot \vec{q} + 2\vec{q} \cdot \vec{p} - \vec{q} \cdot \vec{q} = 6|\vec{p}|^2 - \vec{p} \cdot \vec{q} - |\vec{q}|^2 = 24 - \vec{p} \cdot \vec{q} - 9 = \\ &= 15 - |\vec{p}||\vec{q}|\sin(\angle(\vec{p}, \vec{q})) = 15 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 - 3\sqrt{3} \neq 0.\end{aligned}$$

**Zaključak:** Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nisu normalni.

6. Ako je  $a$  stranica romba i  $h$  visina romba koja je naspramna oštrom uglu, tada je  $\frac{h}{a} = \sin \alpha = \frac{1}{2}$ ,

te je  $h = \frac{1}{2}a$ . Iz  $18 = P_r = h \cdot a = \frac{1}{2}a^2$  dobijamo  $a = 6$ .

Površina  $P$  obrtnog tela sastoji se od površine  $P_{OV}$  omotača valjka visine  $a$  i poluprečnika osnove  $h$ , i dve površine  $P_{OK}$  omotača prave kupe sa izvodnicom  $a$  i poluprečnikom osnove  $h$ :

$$P_{OV} = a(2h\pi) = a^2\pi = 36\pi, \quad P_{OK} = h\pi a = \frac{1}{2}a^2\pi = 18\pi,$$

**Zaključak:**  $P = P_{OV} + 2P_{OK} = 72\pi$ .

7.

- a)  $1$ ,  
b)  $-1, 1, i, -i$ ,  
c)  $-1, 1$ ,  
d)  $-1, 1, i, -i$ ,  
e)  $-1$ ,  
f)  $-1, i, -i$ .

8.

$$\begin{aligned}a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt{n^2 + 2n} - n) \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right) = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2 + 2n}{n^2} + 1}} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + 1}} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = 1\end{aligned}$$

- b) Korišćenjem binomnog obrasca dobijamo

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 1^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

9. a) Stacionarne tačke (tačke među kojima se nalaze tačke ekstremnih vrednosti) su nule prvog izvoda:  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = -1 \vee x_2 = 1)$ .  
Kako je  $f''(x) = 6x$  i  $f''(-1) = -6 < 0$  i  $f''(1) = 6 > 0$ , sledi da u tački  $x_1 = -1$  funkcija  $f$  ima **lokalni maksimum**, a u tački  $x_2 = 1$  lokalni minimum.

- b) Iz  $A \in f$  i  $B \in f$  sledi da je  $y_1 = f(-1) = 1$  i  $y_2 = f(2) = 1$ . Kako tangenta treba da je paralelna sečici koja sadrži A i B, sledi da je koeficijent pravca  $k$  tražene tangente  $t: y = kx + m$  jednak koeficijentu pravca prave AB, dakle

$$k = \frac{1-1}{2-(-1)} = 0, \text{ tj. tangenta treba da je paralelna sa } x\text{-osom. Koeficijent pravca tangente u}$$

dodirnoj tački  $M(x_0, y_0)$  je vrednost prvog izvoda  $f'(x) = 3x^2 - 3$  funkcije  $f$  u tački  $x_0$ , te iz  $f'(x_0) = 3x_0^2 - 3 = 0$  dobijamo  $x_0 = -1$  ili  $x_0 = 1$  (postoje dve takve tangente). Za  $x_0 = 1$  je  $y_0 = f(x_0) = -3$ , te uvrštavanjem  $M(1, -3)$  u jednačinu tangente dobijamo  $-3 = m$ , odnosno tangentu  $t: y = -3$ . Normala grafika funkcije u tački  $M(1, -3)$  je prava koja je normalna na tangentu u toj tački. Kako je tangenta paralelna sa  $x$ -osom, normala je paralelna sa  $y$ -osom, te je njena jednačina  $x = 1$ . Na isti način za  $x_0 = -1$  i odgovarajuće  $y_0 = 1$  dobijamo tangentu  $y = 1$  i njenu normalu  $x = -1$ .

**Zaključak:** Jednačine traženih tangenti su redom  $t_1: y = -3$  i  $t_2: y = 1$ , a tražene normale su redom  $n_1: x = 1$  i  $n_2: x = -1$ .

10. Neparnih cifara ima 5 (1, 3, 5, 7 i 9), kao i parnih (0, 2, 4, 6 i 8), te ke traženi broj je  $(5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 37500$

**Svaki zadatak nosi 6 bodova**

- Neka je  $P_K$  površina a  $O_k$  obim kruga  $K$  i neka je  $\Delta ABC$  jednostraničan trougao upisan u krug  $K$ .
1. Ako je količnik  $\frac{P_k}{O_k} = 10$ , naći: a) poluprečnik  $r$  kruga  $K$ , b) obim trougla  $\Delta ABC$ , c) površinu trougla  $\Delta ABC$
  2. Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definisana sa  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14 = (x-7)(x^2 - x - 2)$ . Naći:
    - a) nule funkcije  $f$ ,
    - b) ekstremne vrednosti funkcije  $f$ ,
    - c) interval u kome funkcija  $f$  opada,
    - d) tačku  $A(x_1, y_1)$  grafika funkcije  $f$  sa celobrojnim koordinatama u kojoj je tangenta grafika paralelna sa pravom  $y = -16x$ .
  3. Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definisana sa  $f(x) = \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12}}$ .
    - a) Rešiti jednačinu  $f(x) = 0$ ,
    - b) Odrediti oblast definisanosti funkcije  $f$ ,
    - c) Ako je  $g(x) = 2^x$ , odrediti funkciju  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .
  4. Neka je  $\vec{a} = (1, 4, -8)$  i  $\vec{b} = (-8, 4, 1)$ .
    - a) Da li se tačka  $A = (1, 4, -8)$  i  $B = (-8, 4, 1)$  nalaze u istom oktantu? Odgovor obrazložiti
    - b) Izračunati intenzitete vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i ugao između njih,
    - c) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ,
    - d) Izračunaj intenzitet vektora  $\vec{a} \times \vec{b}$ ,
    - e) Izračunati ugao između vektora  $\vec{p} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$  i  $\vec{q} = |\vec{b}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{b}$ .
  5. Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definisana sa  $f(x) = 2^x - 4 \cdot 3^{x-2}$ .
    - a) Rešiti jednačinu  $f(x) = 0$
    - b) Naći skup svih rešenja nejednačine  $f(x) > 0$ .
    - c) Rešiti jednačinu  $2f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x - 35 \cdot 3^{x-2}$
  6.
    - a) Nad intervalom  $[0, \pi]$  rešiti nejednačinu  $2 \cos(2x) > \sqrt{2}$ .
    - b) Nad intervalom  $[0, \pi]$  rešiti jednačinu  $2 \sin x (\sin x + \cos x) = 1$
  7. Dokazati da je  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  za svaki prirodan broj  $n$ .
  8. Sve bočne ivice prave, pravilne, trostrane piramide jednake 1 i neka su i uglovi između svake dve bočne ivice jednaki  $\frac{\pi}{2}$ .
    - a) Izračunati zapreminu i površinu piramide.
    - b) Izračunati visinu piramide.

9. Ako je  $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  i  $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , odrediti:
- a)  $\frac{z_1}{z_2}$ ,      b) Skup  $\{z^{2007} | z \in A\}$ , ako je  $A = \{1, z_1, z_2\}$ .
10. a) Na koliko načina se mogu smestiti 3 kuglice različite težine u 5 kutija različite veličine, tako da je u svakoj kutiji najviše jedna kuglica i da za svake dve kuglice važi da je teža kuglica u većoj kutiji?
- b) Na koliko načina se mogu smestiti  $k$  kuglice različite težine u  $n \geq k$  kutija različite veličine, tako da je u svakoj kutiji najviše jedna kuglica i da za svake dve kuglice važi da je traženakuglica u većoj kutiji?

**Svaki zadatak nosi 6 bodova**

**REŠENJA:**

1. Iz  $\frac{P_{K7}}{O_K} = \frac{r^2\pi}{2r\pi} = 10$  sledi  $r = 20$ . Zatim iz  $\frac{2}{3}h = r = 20$  i  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  sledi  $a = 20\sqrt{3}$ , pa je obim trougla  $ABC$  jednak  $60\sqrt{3}$ . Površina trougla  $ABC$  je  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 300\sqrt{3}$ .

2. a) Nule polinoma  $x^2 - x - 2$  su  $-1$  i  $2$ , te su  $-1, 2, 7$  sve nule funkcije  $f$ .
- b)  $f'(x) = 3x^2 - 16x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}, 5\right\}$ . Kako je  $f''(x) = 6x - 16$  i  $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -14 < 0$ ,  $f''(5) = 14 > 0$ , to je maksimum u tački  $M\left(\frac{1}{3}, \frac{400}{27}\right)$ , a minimum u tački  $N(5, -36)$ .
- c) Funkcija opada u intervalu  $\left(\frac{1}{3}, 5\right)$ .
- d) Koeficijent pravca tangente je  $-16 = f'(x) = 3x^2 - 16x + 5$  tj.  $3x^2 - 16x + 21 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{7}{3}, 3\right\}$ . Dakle, zbog uslova zadatka zadovoljava samo tačka  $A(3, -16)$ .

3. a)

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 + x - 12 \Rightarrow$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

b)  $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x+4)(x-3)} > 0$

Dakle, oblast definisanosti funkcije  $f$  je  $(-\infty, -4) \cup (-1, 2) \cup (3, \infty)$ .

c)  $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{4}} \frac{2^{2x} - 2^x - 2}{2^{2x} + 2^x - 12}} = \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{4}} \frac{4^x - 2^x - 2}{4^x + 2^x - 12}}$

4. a) Tačke se nalaze u istom oktantu ako su im sve odgovarajuće koordinate istog znaka. Kako su kod tačka A i B već prve koordinate različitog znaka, sledi da tačke A i B nisu u istom oktantu.
- b)  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 1^2} = 9$  i ugao između njih je  $\frac{\pi}{2}$  zbog  $\vec{a}\vec{b} = 0$ .
- c) Kako je taj paralelogram kvadrat stranice 9, to je tražena površina 81.
- d) Kako je intenzitet vektora  $\vec{a} \times \vec{b}$  jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  to je traženi intenzitet jednak  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \boxed{81}$ .

e)  $\vec{p}\vec{q} = \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)(|\vec{b}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{b}) = \left(\frac{\vec{a}}{9} + \frac{\vec{b}}{9}\right)(9\vec{a} - 9\vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2 = 0,$

pa je  $\square (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$ .

5. a)  $2^x - 4 \cdot 3^{x-2} = 0 / : 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$ .

b)  $2^x - 4 \cdot 3^{x-2} > 0 / : 3^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$ .

c)  $2(2^x - 4 \cdot 3^{x-2}) = \left(\frac{4}{3}\right)^x - 35 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x+1} - 8 \cdot 3^{x-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^x - 35 \cdot 3^{x-2} / : 3^{x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{3^{x-2}} - 8 = \frac{2^{2x}}{3^{2x-2}} - 35 \Leftrightarrow 18 \frac{2^x}{3^x} - 8 = 9 \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 35 \Leftrightarrow 0 = 9 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 - 18 \left(\frac{2}{3}\right)^x - 27$$

$$\stackrel{t=2^x \cdot 3^{-x}}{\Leftrightarrow} t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = -1 \vee \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \log_{\frac{2}{3}} 3}$$

6. a)

$$2 \cos 2x > \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x \in \bigcup_{k \in \square} \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \square} \left(-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right) \Leftrightarrow x \in \dots \cup \left(-\frac{\pi}{8} - \pi, \frac{\pi}{8} - \pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right) \cup \dots$$

Presek ove unije intervala svih rešenja, sa skupom  $[0, \pi]$ , je traženi skup svih rešenja

$$\left[0, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$$

b)

$$2 \sin x (\sin x + \cos x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin x + 2 \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow (1 - \cos 2x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x =$$

$$\cos 2x \Leftrightarrow 2x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \square \right\} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \square \right\}$$

što u preseku sa  $[0, \pi]$  daje  $x \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right\}$ .

7. Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom. Direktnom proverom utvrđujemo da je jednakost tačna za  $n = 1$ . Pretpostavimo da je tačna za:  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ . Sledi dokaz za  $k+1$ :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2$$

8. a) Ako bočnu stranu piramide uzmemo za osnovu, tada je to piramida čija osnova je pravougli trougao čije katete su jednake 1, a visina piramide je takodje 1, pa je zapremina jednaka

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Površina se sastoji od površine tri pravougla trougla i površine jednog jednakostraničnog trougla stranice  $\sqrt{2}$ , pa je površina jednaka  $3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})}$ .

- b) Ako sada uzmemo da je osnova piramide jednakostranični trougao stranice  $\sqrt{2}$ , tada je

$$\text{zapremina piramide jednaka } \frac{1}{3} \frac{(\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{6}, \text{ odakle je } H = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

9. a) 
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{-2-i2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) \*  $1^{2007} = 1$

\* 
$$z_1^{2007} = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{2007} = \cos\left(2007 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(2007 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 1338\pi + i \sin 1338\pi = 1$$

\* analogno dobijamo  $z_2^{2007} = 1$ .

Dakle,  $\boxed{\{z^{2007} \mid z \in A\} = \{1\}}$ .

10. a) Neka je  $\{1, 2, 3\}$  skup od tri kuglice od kojih su svake dve različite težine i neka je  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  skup od 5 kutija od kojih su svake dve različite veličine. Ako sada u prvoj vrsti napišemo kuglice po težini, a u drugoj vrsti ispod svake kuglice napišemo kutiju u koju je smeštena, tada će zbog uslova zadatka da je teža kuglica u većoj kutiji slediti da u drugoj vrsti su brojevi (kutije) poredjani po veličini tj. svi načini su:

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 134 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 135 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 145 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 234 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 235 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 245 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 345 \end{pmatrix}$$

Primitimo da su to sve rastuće funkcije tročlanog skupa  $\{1, 2, 3\}$  u skup  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , a takodje druga vrsta predstavlja sve tročlane podskupove petočlanog skupa  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , a to jesu sve moguće KOMBINACIJE BEZ PONA VLJANJA OD 5 ELEMENATA

TREĆE KLASE, kojih ima  $\binom{5}{3} = 10$

- b) Na osnovu rešenja pod a) sledi da je rešenje  $\binom{n}{k}$ .

1. Neka je  $P_K$  površina a  $O_K$  obim kruga  $K$  i neka je  $ABCD$  kvadrat upisan u krug  $K$ . Ako je  $\frac{P_K}{O_K} = 10$ , naći:
  - a) poluprečnik  $r$  kruga  $K$ ,
  - b) obim kvadrata  $ABCD$ ,
  - c) površinu kvadrata  $ABCD$ .
2. Neka je  $ABC$  je jednakokrako pravougli trougao čija je hipotenuza  $AB = 1\text{ cm}$ . Nad njegovom katetom, kao nad hipotenuzom, konstruisan je jednakokrako pravougli trougao i tako redom.
  - a) Dokazati da je dobijeni niz hipotenuza geometrijski niz i naći količnik niza.
  - b) Naći 2008. član geometrijskog niza,
  - c) Naći sumu svih članova niza.
3. Poslastičarnica pravi pet vrsta kolača od različitog voća. Kupac kupuje tri kolača. Naći na koliko različitih načina mogu da se izaberu tri kolača
  - a) ako su svi kupljeni kolači različiti,
  - b) ako među kupljenim kolačima može da bude istih.
4. Od kocke ivice  $2 + \sqrt{2}$  odsečeno je 8 rogļeva (piramidica) tako da od svake strane kocke ostane pravilan osmougao. Naći zapreminu tako dobijenog tela.
5. Neka su  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  i  $\vec{b} = \vec{m} - p\vec{n}$ , vektori gde je  $m = |\vec{m}| = 2$ ,  $n = |\vec{n}| = 1$ ,  $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ , a  $p$  realan parametar.
  - a) Odrediti  $p$  tako da vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  budu ortogonalni.
  - b) Ako je  $p = 2$  naći visinu  $h_a$  paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
6.
  - a) Odrediti kompleksan broj  $z$  za koji važi  $|z| - z = 1 + 2i$ .
  - b) Ako je  $z = 1 + i\sqrt{3}$ , naći  $z^{60}$  i  $\frac{z}{\bar{z}}$ .
7. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  koreni kvadratne jednačine  $x^2 + ax - 2 = 0$ . Odrediti realan parametar  $a$  tako da za korene kvadratne jednačine  $x_1$  i  $x_2$  važi  $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$ .
8. Neka je funkcija  $f$  definisana sa  $f(x) = \log_3(9^x - 2 \cdot 3^x - 4)$ .
  - a) Naći oblast definisanosti funkcije  $f(x)$ .
  - b) Rešiti jednačinu  $f(x) = x$ ,
9. Neka je funkcija  $f$  definisana sa  $f(x) = \sin x + \sin 2x$ .
  - a) Naći nule funkcije  $f(x)$  u intervalu  $[-\pi, \pi]$ .
  - b) Rešiti nejednačinu  $f(x) < 0$  u intervalu  $[-\pi, \pi]$ .
10. Neka je je funkcija  $f$  definisana sa  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ .
  - a) Naći  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .
  - b) Odrediti intervale monotonosti ( rasta i opadanja ) funkcije  $f$
  - c) Naći ekstremne vrednosti funkcije  $f(x)$ .
  - d) Naći jednačinu tangente grafika funkcije  $f(x)$  u tački  $A(0, y_0)$ .

**Svaki zadatak nosi 6 bodova**

**REŠENJA:**

1. Iz  $\frac{P_K}{O_K} = \frac{r^2 \pi}{2r \pi} = 10$  sledi  $r = 20$ . Kako je  $AB = 20\sqrt{2}$ , to je obim kvadrata  $80\sqrt{2}$ , a površina 800.

2. Traženi niz  $a_n$  je  $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8\sqrt{2}}, \dots$  odnosno  $a_n = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$ ,  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , pa je

a) količnik  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b)  $a_{2008} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2007}$

c)  $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$

3. a) 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 tj.  $\binom{5}{3} = 10$ . Kombinacije bez ponavljanja.

b) 111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 155, 222, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 244, 245, 255, 333, 334, 335, 344, 345, 355, 444, 445, 455, 555 tj.  $\binom{5+3-1}{3} = 35$ . Kombinacije sa ponavljanjem.

4. Iz jednačine  $\frac{x}{\sqrt{2}} + x + \frac{x}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$  sledi da osnovna ivica  $x$  piramide je  $x = \sqrt{2}$ , a bočne ivice su joj  $y = \frac{x}{\sqrt{2}} = 1$ , pa je zapremina traženoga tela  $V = (2 + \sqrt{2})^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot y^2) \cdot y = (2 + \sqrt{2})^3 - \frac{4}{3}$ .

a)  $\vec{a}\vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n})(\vec{m} - p\vec{n}) = 4 - p \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 2p \cdot 1^2 = 0 \Leftrightarrow p = 2$ .

5. b)  $h_a = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{a} = 4 \frac{|\vec{n} \times \vec{m}|}{\sqrt{a\vec{a}}} = 4 \frac{n \cdot m \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{m^2 + 4mn \cos \frac{\pi}{3} + 4n^2}} = 4 \frac{1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1^2}} = 2$ .

6. a)  $|z| - z = 1 + 2i \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \wedge -y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge y = -2$ .

b)  $(1 + i\sqrt{3})^{60} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{60} = 2^{60} e^{i\frac{\pi}{3} \cdot 60} = 2^{60} e^{20i\pi} = 2^{60}$ ,  $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ .

7.  $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 3x_1 x_2 + 7 \Leftrightarrow a^2 = 3 \cdot (-2) + 7 \Leftrightarrow a = \pm 1$ .

8. a)  $x \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 4 > 0 \Leftrightarrow 3^x \in (-\infty, 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}, \infty) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3^x > 1 + \sqrt{5} \Leftrightarrow x > \log_3(1 + \sqrt{5})$ .

b)  $f(x) = x \Leftrightarrow 9^x - 2 \cdot 3^x - 4 = 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x = -1 \vee 3^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 4$ .

9. a)  $\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 + 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ . Kako je  $k$  ceo broj tj.  $k \in \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , to od svih ovih rešenja intervalu  $[-\pi, \pi]$  pripadaju samo elementi skupa  $\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ .

b) Funkcija  $f$  neprekidna, te ona menja znak prolaskom kroz svaku svoju nulu. Funkcije  $f$  u tački  $\frac{\pi}{3}$  je  $f(\frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ , to sledi da je  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{2\pi}{3}, 0) \cup (\frac{2\pi}{3}, \pi)$ .

10. a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$ ,

b)  $f'(x) = (\frac{x^2-1}{x^3-1})' = \frac{2x(x^3-1) - 3x^2(x^2-1)}{(x^3-1)^2} = \frac{x(2x^2+2x+2-3x^2-3x)}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$ . Odavde sledi  $f$  raste akko  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$  i  $f$  opada akko  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

c) Kako je  $f'(0) = f'(-2) = 0$  i na osnovu intervala monotonosti funkcije  $f$ , sledi da je u tački  $A(0, 1)$  maksimum i tački  $B(-2, -\frac{1}{3})$  minimum.

d) U tački  $A(0, 1)$  je ekstrem grafika funkcije  $f$ , te je tangenta u tački  $A(0, 1)$  paralelna sa  $x$  osom tj. njena jednačina je  $y = 1$ .

1.
  - a) Rešiti jednačinu  $\log_4(12 \cdot 2^x + 64) = x$ .
  - b) Rešiti nejednačinu  $\log_x(x^2 - 6) < 1$ .
  
2. Pravaugli trapez je opisan oko kruga poluprečnika 2, a jedna osnovica trapeza je za 50% veća od tog poluprečnika. Izračunati površinu  $P$  tog trapeza.
  
3. Na koliko različitih načina Vlada, Aca i Mila mogu podeliti 5 knjiga, pri čemu može da se desi da neko nije dobio nijednu knjigu ako se:
  - a) knjige razlikuju
  - b) knjige ne razlikuju.

Bočne ivice prave pravilne četvorostране piramide su jednake 1, a ivica njene kvadratne osnove jednaka je  $x$ .
4.
  - a) Odrediti zapreminu  $V(x)$  te piramide u zavisnosti od  $x$ .
  - b) Odrediti za koje  $x_1$  funkcija  $W(x)$  ima maksimum, ako je  $W(x) = 18V^2(x)$ .
  - c) Da li je i zapremina  $V(x)$  maksimalna za tu istu vrednost  $x_1$ ? Ako jeste izračunati  $V_{max} = V(x_1)$ .
5. Neka je  $\vec{a} = 8\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 11\vec{k}$  i  $\vec{c} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 7\vec{k}$ , gde su  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  jedinični međusobno normalni vektori.
  - a) Izračunati intenzitete vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
  - b) Izračunati kosinus ugla  $\psi$  između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i ispitati da li je  $\psi < 60^\circ$  ili je  $\psi > 60^\circ$  ili je  $\psi = 60^\circ$ .
  - c) razložiti vektor  $\vec{c}$  u pravcu vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  tj. napisati ga u obliku  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ , gde su  $\alpha$  i  $\beta$  neki realni brojevi.
6. Neka je  $z = 1 + i$  kompleksni broj. Izračunati:
  - a) modul od  $z$  tj.  $|z|$ .
  - b) argument od  $z$  tj.  $\arg z$ .
  - c) realni i imaginarni deo broja  $z^{2009}$  tj.  $Re(z^{2009})$  i  $Im(z^{2009})$ .
7. Najveće rešenje  $b_1$  jednačine  $\sqrt{\frac{x+1}{5x-5}} = 1$  je prvi član geometrijskoga niza, a  $b_4 = 81$  je četvrti član toga istoga geometrijskoga niza.
  - a) Izračunati zbir prvih  $n$  članova toga niza,  $S_n = b_1 + \dots + b_n$ .
  - b) Izračunati  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3^n + 1}$ .
8. Naći sve realne vrednosti parametra  $m$  za koje je  $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$  za svaki realni broj  $x$ .
  
9. Neka je funkcija  $f(x)$  definisana sa  $f(x) = 5 - 6 \sin 2x - \cos 4x$ .
  - a) Naći nule funkcije  $f(x)$ .
  - b) Rešiti nejednačinu  $f(x) \geq 0$ .

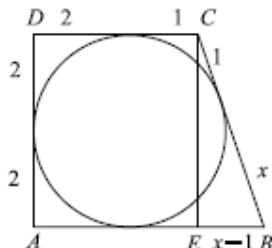
Neka je funkcija  $f(x)$  definisana sa  $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}$ .
10.
  - a) Naći  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x)$  i nule funkcije  $f(x)$ .
  - b) Naći tačke u kojima je  $f'(x) = 0$  i odrediti intervale u kojima funkcija  $f(x)$  raste tj. gde je  $f'(x) > 0$ .
  - c) Da li u svim tačkama u kojima je  $f'(x) = 0$  funkcija  $f(x)$  ima ekstremne vrednosti?
  - d) Naći jednačinu tangente  $t$  grafika funkcije  $f(x)$  u tački  $A(-2, y_0)$ .

**Svaki zadatak nosi 6 bodova**


## REŠENJA:

1. a)  $\log_4(12 \cdot 2^x + 64) = x \Leftrightarrow 12 \cdot 2^x + 64 = 4^x \Leftrightarrow 4^x - 12 \cdot 2^x - 64 = 0$ . Uvođenjem smene  $t = 2^x$  dobija se  $t^2 - 12t - 64 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 16 \vee 2^x = -4 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$ .
- b) Nejednačina je definisana za  $x \in (\sqrt{6}, \infty)$ .  $\log_x(x^2 - 6) < 1 \Leftrightarrow x^2 - 6 < x$ , tj.  $x^2 - x - 6 < 0$  čije je rešenje  $x \in (-2, 3)$  što u preseku sa  $x \in (\sqrt{6}, \infty)$  daje  $x \in (\sqrt{6}, 3)$ .

2. Na slici je prikazan izgled zadatog trapeza. Iz trougla  $EBC$  primenom Pitagorine teoreme dobijamo  $(x+1)^2 = 4^2 + (x-1)^2 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$ . Tražena površina je  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{6+3}{2} \cdot 4 = 18$ .



3. a) Broj načina na koji se knjige mogu podeliti ako se razlikuju predstavlja broj varijacija sa ponavljanjem pete klase od 3 elementa i iznosi  $V_5^3 = 3^5 = 243$ .

- b)  Broj načina na koji se knjige mogu podeliti ako se ne razlikuju predstavlja broj permutacija od 7 elemenata od kojih je 5 istih i 2 ista i iznosi  $P_{5,2}(7) = \frac{7!}{5!2!} = 21$ .

4. a) Potrebno je odrediti visinu  $H$  zadate piramide. Primenom Pitagorine teoreme dobija se da je  $H = \sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . Zapremina posmatrane piramide je  $V = \frac{1}{3}BH = \frac{x^2}{3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .
- b)  $W(x) = 18V^2(x) = 18\frac{x^4}{9}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2x^4 - x^6$ .  $W'(x) = 8x^3 - 6x^5$ , pa je  $W'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3(4 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ . Kako je  $x$  ivica osnove piramide to mora biti  $x > 0$ .  $W''(x) = 24x^2 - 30x^4$ , pa je  $W''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) < 0$  i funkcija  $W(x)$  ima maksimum u tački  $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .
- c) Funkcija  $V(x)$  je pozitivna, funkcije  $V(x)$  i  $W(x)$  su neprekidne te  $V(x)$  i  $W(x)$  istovremeno rastu i opadaju što znači da moraju imati ekstrem u istoj tački. Zapremina  $V(x)$  je maksimalna za istu vrednost  $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  i  $V_{max} = V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{27}$ .

5. a)  $|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} = \sqrt{225} = 15$ .
- b) Kako je  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 70$ ,  $|\vec{a}| = 9$  i  $|\vec{b}| = 15$  to je  $\cos \psi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{14}{27} > \frac{1}{2}$ . Kako je  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  i funkcija  $\cos x$  je opadajuća na intervalu  $(0, \pi)$  to je  $\psi < 60^\circ$ .
- c)  $(6, -9, -7) = \alpha(8, 1, 4) + \beta(2, 10, 11) \Leftrightarrow (6 = 8\alpha + 2\beta \wedge -9 = \alpha + 10\beta \wedge -7 = 4\alpha + 11\beta \Leftrightarrow \alpha = 1 \wedge \beta = -1$ , tj.  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

6. a)  $|z| = \sqrt{2}$ .
- b)  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ .
- c)  $z^{2009} = (1+i)^{2009} = ((1+i)^2)^{1004} \cdot (1+i) = (2i)^{1004} \cdot (1+i) = 2^{1004} \cdot i^{4 \cdot 251} \cdot (1+i) = 2^{1004} \cdot (1+i)$ .  
 $R_e(z^{2009}) = I_m(z^{2009}) = 2^{1004}$ .

7. a) Jednačina je definisana za  $\frac{x^2+1}{5x-5} \geq 0$ , tj.  $x > 1$ .  $\sqrt{\frac{x^2+1}{5x-5}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{5x-5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{5x-5} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \vee x = 3)$ , pa je prvi član geometrijskoga niza  $b_n$  jednak  $b_1 = 3$ . Kako je  $b_1 = 3$ , a  $b_4 = 81$  radi se o geometrijskom nizu  $b_n = 3^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Zbir prvih  $n$  članova niza geometrijskoga niza  $b_n$  je  $S_n = 3 \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ .
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}(3^n - 1)}{3^n + 1} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^n + 1} = \frac{3}{2}$ .

8. Posmatrajmo funkciju  $y = mx^2 - 4x + 3m + 1$ . Da bi grafik ove funkcije bila parabola sa otvorom okrenutim nagore potrebno je da bude  $m > 0$ . Kako je  $D = (-4)^2 - 4m(3m + 1)$  i s obzirom da je  $D = 0$  za  $m_1 = -\frac{4}{3}, m_2 = 1$ , to je  $D < 0$  za  $m \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (1, \infty)$ . Prema tome  $y > 0$  za svako  $x \in \mathbb{R}$  ako je  $m \in (1, \infty)$ .

9. a)  $f(x) = 5 - 6\sin 2x - \cos 4x = 5 - 6\sin 2x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 5 - 6\sin 2x - (1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x) = 4 - 6\sin 2x + 2\sin^2 2x$ , Uvođenjem smene  $t = \sin 2x$  dobija se jednačina  $2t^2 - 6t + 4 = 0$  tj.  $t^2 - 3t + 2 = 0$  čija su rešenja  $t = 1 \vee t = 2$ , što daje  $\sin 2x = 1 \vee \sin 2x = 2$ . Jednačina  $\sin 2x = 2$  nema rešenja, a  $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- b) Da bi nejednačina  $f(x) \geq 0$  bila zadovoljena potrebno je da važi  $\sin 2x \notin (1, 2)$ , a to važi za sve  $x \in \mathbb{R}$ .
10. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 10}{x + 1} = 6$ ,  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 2) \vee (x + 5)$ .
- b)  $f'(x) = \frac{(x^2 + 7x + 10)'(x + 1) - (x^2 + 7x + 10)(x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3) \vee (x = 1)$ .  
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ ,
- c) Kako važi i  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (-1, 1)$ , i kako je funkcija  $f(x)$  neprekidna na celoj oblasti definisanosti  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  to funkcija  $f(x)$  u tački  $x_1 = -3$  ima maksimum a u tački  $x_2 = 1$  ima minimum.
- d) Za  $x_0 = -2$  je  $y_0 = f(x_0) = 0$  i  $f'(-2) = -3$ . Jednačina tangente  $t$  glasi  $t : y - 0 = -3(x + 2) \Leftrightarrow y = -3x - 6$ .

1. Rešiti nejednačinu:  $\frac{1-2x}{x^2-5x+6} < \frac{2}{5}$ .
2. Rešiti jednačinu:  $\log_2(2^x + 2) = 3 - x$ .
3. Rešiti jednačinu:  $\cos x + \sin \frac{x}{2} + 2 = 0$ .
4. Dokazati da za svako  $n \in \mathbb{N}$  važi:  

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(6n-5) \cdot (6n+1)} = \frac{n}{6n+1}$$
5. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja jednačine:  $x^2 + 5(2m-3)x + 6(m-1) = 0$ . Odrediti parametar  $m$  tako da je:  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{13}{6}$ .
6. Dati su brojevi  $a = -6$  i  $b = 48$ . Odrediti brojeve  $x$  i  $y$ ,  $a < x < y < b$ , tako da  $a, x, y$  čine aritmetičku a  $x, y, b$  geometrijsku progresiju.
7. Pun ugao je podeljen na tri dela (ugla) koji se odnose kao 2:3:4. Za koliko je stepeni drugi deo veći od prvog, a za koliko je treći veći od drugog? Za koliko procenata je drugi deo veći od prvog, a za koliko je treći veći od drugog?
8. Ako je površina kruga upisanog u romb jednaka  $12\pi$ , a jedan ugao romba je  $60^\circ$ , izračunati dijagonale romba.
9. Prava pravilna šestostrana piramida osnovne ivice  $a = 6$  i bočne ivice  $s = 10$  presečena je ravni koja prolazi kroz sredinu visine a paralelna je ravni osnove. Izračunati površinu dobijene zarubljene piramide.
10. Neka su  $P, Q, R, S$  redom sredine stranica  $AB, BC, CD$  i  $DA$  proizvoljnog četvorougla  $ABCD$  i neka je  $\vec{AB} = \vec{p}, \vec{BC} = \vec{q}$  i  $\vec{CD} = \vec{r}$ . Ako je  $\{M\} = PR \cap QS$ , izraziti vektor  $\vec{AM}$  u zavisnosti od vektora  $\vec{p}, \vec{q}$  i  $\vec{r}$ .

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

### REŠENJE

1.  $\frac{1-2x}{x^2-5x+6} < \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5-10x}{x^2-5x+6} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-7}{x^2-5x+6} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ .
2. Data jednačina je definisana za svako  $x$ .  
 $\log_2(2^x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow 2^x + 2 = 2^{3-x} \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1$  je rešenje date jednačine.
3.  $\cos x + \sin \frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2(\sin \frac{x}{2} - \frac{3}{2})(\sin \frac{x}{2} + 1) = 0 \Rightarrow x \in \{(4k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

4. Da data jednakost važi za svaki prirodan broj  $n$  dokazaćemo koristeći princip matematičke indukcije. Za  $n = 1$  data jednakost važi, jer je

$$\frac{1}{1 \cdot 7} = \frac{1}{6+1}.$$

Pretpostavimo da data jednakost važi za  $n = k$ , tj.

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(6k-5) \cdot (6k+1)} = \frac{k}{6k+1}.$$

Dokazaćemo da data jednakost važi i za  $n = k + 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(6k-5) \cdot (6k+1)} + \frac{1}{(6(k+1)-5) \cdot (6(k+1)+1)} = \\ & = \frac{k}{6k+1} + \frac{1}{(6k+1) \cdot (6k+7)} = \frac{k+1}{6k+7}. \end{aligned}$$

Dakle, na osnovu principa matematičke indukcije data jednakost važi za svaki prirodan broj  $n$ .

5.  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{13}{6} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{(-5(2m-3))^2}{6(m-1)} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow 4m^2 - 13m + 10 = 0 \Rightarrow m \in \left\{ \frac{5}{4}, 2 \right\}$  (Primitimo da je  $m \neq 1$ . Iz  $m = 1$  sledilo bi da su rešenja  $x_1 = 0, x_2 = 5$ , tj. da data jednakost nije definisana).

6. Iz činjenice da su  $a, x, b$  članovi aritmetičke progresije sledi da je

$$x = \frac{a+y}{2} = \frac{y-6}{2}. \text{ Iz činjenice da su } x, y, b \text{ članovi geometrijske progresije sledi da je}$$

$$y^2 = xb \Rightarrow x = \frac{y^2}{48}. \text{ Rešavajući dati sistem jednačina dobija se da je } x = 3; y = 12.$$

7. Označimo uglove sa  $\alpha, \beta, \gamma$ . Iz uslova

$$\alpha = 2x; \beta = 3x; \gamma = 4x; \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \Rightarrow x = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 80^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 160^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = 40^\circ, \gamma - \beta = 40^\circ. \text{ Ugao } \beta \text{ je veći od ugla } \alpha \text{ za } 50\% \text{ a ugao } \gamma \text{ od ugla } \alpha \text{ za } \frac{100}{3}\%.$$

8. Označimo sa  $r$  poluprečnik upisanog kruga,  $h$  visinu romba, a sa  $d_1, d_2$  dijagonale romba.  $r^2 \pi = 12\pi \Rightarrow r = 2\sqrt{3}; h = 2r = 4\sqrt{3}; \alpha = \angle DAB = 60^\circ$ . Dakle, trougao  $ABD$  je jednakostraničan. Sledi da je  $d_2 = BD = AB = \frac{2h}{\sqrt{3}} = 8; d_1 = AC = 2h = 8\sqrt{3}$ .

9.  $VA_1 : VA = A_1 B_1 : AB = VO_1 : VO = 1 : 2 \Rightarrow a_1 = A_1 B_1 = 3 \wedge s_1 = 5$ .

$$l = \frac{a - a_1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = \sqrt{s_1^2 - l^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

$$P = B + B_1 + M = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \frac{a + a_1}{2} h = \frac{3}{2} (45\sqrt{3} + 9\sqrt{91}).$$

$\vec{AM} = \vec{AP} + \vec{PM}$ . Kako je  $PQRS$  paralelogram ( $PQ$  i  $RS$  su paralelne i podudarne kao srednje linije trouglova  $ABC$  i  $CDA$ ) to sledi da je

10.  $\vec{AM} = \vec{AP} + \frac{1}{2} \vec{PR} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} (\vec{PB} + \vec{BC} + \vec{CR}) = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{CD}) =$   
 $= \frac{3}{4} (3\vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}).$

- Rešiti nejednačinu:  $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$ .
- U jednačini  $mx^2 + 3x - (4m - 6) = 0$  odrediti parametar  $m$  tako da jednačina ima korene  $x_1$  i  $x_2$  različitog znaka za koje je  $x_1^2 + x_2^2 = 5$ .
- Rešiti nejednačinu:  $4^{x-1} - 5 \cdot 2^{x-2} < 6$ .
- Naći  $x \in [0, \pi)$  tako da je  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$ .
- Dokazati da za svako  $n \in \mathbb{N}$  važi:  

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$
- Rešiti sistem:  $\log_2 2x - 2 \log_4 y = 1 \wedge (\log_4 x) \log_x (3y^2 - x) = 1$ .
- Prvi, treći i sedmi član aritmetičkog niza čine prva tri člana geometrijskog niza. Naći količnik geometrijskog niza. Koje mesto u aritmetičkom nizu zauzima četvrti član geometrijskog niza?
- U krug poluprečnika 9 cm upisan je četvorougao  $ABCD$  sa normalnim dijagonalama, koje se seku u tački  $S$ . Rastojanja dijagonala od centra kruga  $O$  su 3cm i 7cm. Izračunati površinu četvorougla  $ABCD$  i odnos u kome tačka  $S$  deli dužu dijagonalu  $BD$ .
- Poprečni presek kanala je jednakokraki trapez sa osnovicama  $a=10\text{cm}$  (gornji deo kanala),  $b=4\text{cm}$  (dno kanala) i krakom  $c=5\text{cm}$ . Kopanje kanala je trajalo 6 dana i svakog dana je iskopano 100m dužine. Kolika je zapremina iskopane zemlje i koliko dana bi trajalo kopanje da je svakog dana iskopano 120m dužine?
- Neka je  $S$  sredina stranice  $CD$  paralelograma  $ABCD$ , a  $O$  presek dijagonala  $AC$  i  $BD$ .  
 a) Ako je  $\vec{BO} = \vec{p}$ ,  $\vec{BC} = \vec{q}$ , izraziti vektor  $\vec{AS}$  preko vektora  $\vec{p}$  i  $\vec{q}$ ;  
 b) Ako je  $A(1, 0, -2)$ ,  $B(3, -1, 5)$ ,  $C(0, 2, 0)$ , odrediti koordinate tačke  $S$ .

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

### REŠENJA:

- Za  $x \geq 0$  važi  

$$\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 5x - 12}{x - 3} \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 3);$$
 Za  $x < 0$  važi  

$$\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 7x - 12}{x - 3} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0);$$
 Dakle, skup rešenja polazne jednačine je skup  $(-\infty, 3)$ .
- $x_1^2 + x_2^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{m}\right) - 2 \frac{-(4m-6)}{m} - 5 \Leftrightarrow m \in \{1, 3\}$ . Iz uslova  
 $x_1x_2 = -\frac{4m-6}{m} < 0$  sledi da je rešenje  $m = 3$ .
- $4^{x-1} - 5 \cdot 2^{x-2} < 6 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 < 0 \Rightarrow 2^x \in (-3, 8) \Rightarrow 2^x \in (0, 8) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$ .
- $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = 2 \Leftrightarrow 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 0$ . S obzirom da se traže rešenja nad intervalom  
 $[0, \pi)$  to je skup rešenja daje jednačine  $\left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10} \right\}$ .

5. Da data jednakost važi za svaki prirodan broj  $n$  dokazažemo koristeći princip matematičke indukcije. Za  $n = 1$  data jednakost važi, jer je

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1+1}{2 \cdot 1+3} = \frac{2}{5}.$$

Pretpostavimo da data jednakost važi za  $n = k$ , tj.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$ .

Dokazaćemo da data jednakost važi i za  $n = k+1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)} + \frac{1}{(2k+3) \cdot (2k+5)} &= \\ = \frac{1}{(2k+3) \cdot (2k+5)} + \frac{k+1}{2k+3} &= \frac{k+2}{2k+5}. \end{aligned}$$

Dakle, na osnovu principa matematičke indukcije data jednakost važi za svaki prirodan broj  $n$ .

6. Dati sistem je definisan za  $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$ ;  $y \in (0, \infty)$ .

$$\log_2 2x - 2 \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_2 2x - \log_2 y = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{y} = 2 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(\log_4 x) \log_x (3y^2 - x) = 1 \Leftrightarrow \log_x (3y^2 - x) = \frac{1}{\log_4 x} = \log_x 4 \Leftrightarrow 3y^2 - x = 4. \text{ Sledi da je}$$

$$\text{rešenje sistema } (x, y) = \left( \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

7. Za aritmetički niz  $\{a_n\}$  imamo da je

$$a_3^2 = a_1 \cdot a_7 \Leftrightarrow (a_1 + 2d)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 6d) \Leftrightarrow a_1 = 2d. \text{ Za geometrijski niz } \{b_n\} \text{ se dobija da je}$$

$$q^2 = \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4d}{2d} = 2. b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 8a_1 \Rightarrow n = 1 + \frac{7a_1}{d} = 15.$$

8. Neka je  $O_2$  normalna projekcija centra kruga  $O$  na dijagonalu  $BD$  datog četvorougla, a  $O_1$  normalna projekcija centra kruga  $O$  na dijagonalu  $AC$  datog četverougla. Sledi da je

$$BD = 2O_2B = 2\sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}cm,$$

$$AC = 2O_1A = \sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2}cm.$$

$$\text{Dakle, } P_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 96cm^2, \text{ a}$$

$$DS : SB = (6\sqrt{2} - 7) : (6\sqrt{2} + 7).$$

9. Označimo sa  $h$  dubinu kanala (visina jednakokrakog trapeza).

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = 4m; B = P_{ABCD} = \frac{a+b}{2}h = 28m^2; H = 6 \cdot 100 = 600m;$$

$$\text{Zapremina je } V = BH = 28 \cdot 600 = 16800m^3; \text{ a traženi broj dana } n \text{ je } n = \frac{H}{120} = 5.$$

10. a)  $\vec{AS} = \vec{AD} + \vec{DS} = \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \vec{q} + \frac{1}{2}(\vec{DB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}(3\vec{q} - 2\vec{p}).$

$$\text{b) } \vec{OS} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + 2\vec{OC} - \vec{OB}) =$$

$$= \left( \frac{1+0-3}{2}, \frac{0+4+1}{2}, \frac{-2+0-5}{2} \right) = \left( -1, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2} \right). \text{ Dakle, tačka } S\left(-1, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

1. Naći rešenja nejednačine:  $\frac{-2x^2 + 8x - 2}{x - 3} \leq -3x$ .
2. U jednačini  $x^2 - 2(m+1)x + 4m + 2 = 0$  odrediti vrednost parametra  $m$  tako da zbir rešenja date jednačine bude jednak zbiru njihovih kvadrata.
3. Rešiti jednačinu:  $9^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$ .
4. Rešiti jednačinu  $3 \log_{x^3} 81 - 4 \log_9 x = -2, x > 0, x \neq 1$ .
5. Rešiti jednačinu  $2 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x$ .
6. Date su tačke  $A(3,1); B(5,5)$ . Odrediti tačku  $C$  u kojoj simetrala duži  $AB$  seče  $y$  osu, a zatim napisati jednačinu kružnice sa centrom u tački  $C$  koja prolazi kroz tačke  $A$  i  $B$ .
7. Oko kruga poluprečnika  $2\text{cm}$  opisan je jednakokraki trapez površine  $20\text{cm}^2$ . Naći stranice tog trapeza.
8. Data je kocka  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  zapremine  $64\text{cm}^3$ . Ako je  $S$  sredina ivice  $A_1 D_1$  odrediti površinu piramide  $ABCD S$ .
9. Peti član aritmetičkog niza je  $14$ , a razlika osmog i trećeg člana je  $15$ . Odrediti prvi član niza i razliku. Koliko članova ovog niza treba sabrati da bi zbir iznosio  $26$ ?
10. U razvoju binoma  $\left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{x}\right)^n$ , zbir binomnih koeficijenata prva tri člana je  $29$ . Odrediti  $n$  i izračunati drugi član u razvoju binoma.

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

### REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za  $x \neq 3$ ;
 
$$\frac{-2x^2 + 8x - 2}{x - 3} \leq -3x \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 8x - 2 + 3x^2 - 9x}{x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [2, 3)$$
2. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja date jednačine.
 
$$x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(4m+2) = 2(m+1) \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$$
3.  $9^{x-1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ . Ako stavimo  $3^x = t$  dobijamo kvadratnu jednačinu  $t^2 - 6t - 27 = 0$  sa rešenjima  $t_1 = -3, t_2 = 9$ . Jednačina  $3^x = -3$  nema rešenja.  $3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$ . Dakle, skup rešenja date jednačine je  $\{2\}$ .
4.  $3 \log_{x^3} 81 - 4 \log_9 x = -2 \Leftrightarrow 3 \frac{1}{\log_9 x^3} - 4 \log_9 x = -2 \Leftrightarrow$ 

$$\Leftrightarrow 3 \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2} \log_9 x^3} - 4 \log_9 x = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_9 x^3} - 4 \log_9 x = -2$$
. Ako stavimo  $\log_9 x = t$  dobijamo kvadratnu jednačinu  $2t^2 - t - 1 = 0$  sa rešenjima  $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 1$ .
 
$$\log_9 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}; \log_9 x = 1 \Leftrightarrow x = 9$$
. Dakle, skup rešenja date jednačine je  $\left\{\frac{1}{3}, 9\right\}$ .

5.  $2 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x \Leftrightarrow 2 + 3 \sin x = \cos 2x \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2 + 3 \sin x = 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ . Ako stavimo  $\sin x = t$  dobijamo kvadratnu jednačinu  $2t^2 + 3t + 1 = 0$  sa rešenjima  
 $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = -1$ .  $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2l\pi : l \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
 $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{2} + 2m\pi : m \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
 Dakle, skup rešenja date jednačine je  
 $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2l\pi : l \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2m\pi : m \in \mathbb{Z}\right\}$ .
6. Označimo sa  $k_1$  i  $k_2$  koeficijente pravca prave  $AB$  i simetrale  $s$  duži  $AB$ , respektivno. Tada je  $k_1 = \frac{5-1}{5-3} = 2$  i  $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}$ . Sredina  $S$  duži  $AB$  ima koordinate  $S(4,3)$ . Jednačina simetrale  $s$  je prava  $y-3 = -\frac{1}{2}(x-4)$ , odnosno prava  $y = -\frac{1}{2}x + 5$ . Kako tačka  $C(0, y_0)$  pripada simetrali  $s$  sledi da je  $y_0 = 5$ , odnosno  $C(0,5)$ . Kako je  $r = |AC| = \sqrt{(0-3)^2 + (5-1)^2} = 5$  poluprečnik date kružnice, sledi da je jednačina tražene kružnice  $x^2 + (y-5)^2 = 25$ .
7. Iz  $P = \frac{a+b}{2}h = 20, h = 2r = 4$  sledi da je  $a+b = 10$ . Kako je četvorougao tangenti to je  $a+b = 2c \Rightarrow c = 5$ . Iz  $c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$  sledi da je  $a-b = 6$ . Sada iz  $a+b = 10$  i  $a-b = 6$  sledi da je  $a=8$  i  $b=2$ .
8.  $V = a^3 = 64 \Rightarrow a = 4; B = a^2 \Rightarrow B = 16. h_1 = a = 4 \Rightarrow P_{\Delta ADS} = \frac{ah_1}{2} = 8.$   
 $h_2 = AS = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow P_{\Delta ABS} = \frac{ah_2}{2} = 4\sqrt{5}$   
 $h_3 = SS_1 = A_1B = 4\sqrt{2} \Rightarrow P_{\Delta BCS} = \frac{ah_3}{2} = 8\sqrt{2}$   
 $P = B + P_{\Delta ADS} + 2P_{\Delta ABS} + P_{\Delta BCS} = 8(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2})$
9.  $a_5 = a_1 + 4d = 14; a_8 - a_3 = (a_1 + 7d) - (a_1 + 2d) = 5d = 15 \Rightarrow d = 3; a_1 = 14 - 4d = 2.$   
 $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 24 \Rightarrow 3n^2 + n - 52 = 0 \Rightarrow n = 4$
10.  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 29 \Rightarrow n = 7.$   
 $T_2 = \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^{7-1} \cdot (\sqrt{x}) = 7 \cdot 2^6 \cdot x^{-12+\frac{1}{2}} = 448x^{-\frac{23}{2}}.$

1. Dat je racionalni algebarski izraz:  $R(n) = \frac{n^3 - 27}{5n - 15} \cdot \left( \frac{n+3}{n-3} + \frac{n-3}{n+3} - 2 \right)$ ,  $n \in N, n \neq 3$ .
- Uprostiti dati izraz,
  - Naći  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)$
2. Rešiti nejednačine:  $\frac{x^2 + 2x + 9}{x - 1} \leq -3$ .
3. Rešiti jednačinu:  $5^{x-1} - 3 \cdot 5^{2-x} = 2$ .
4. Rešiti sistem jednačina:  $\log(x+5)^3 + \frac{2}{\log_y 3} = -2$ ,  $\log_4(x+5)^2 + \log_9 \frac{1}{y} = 4$ .
5. Rešiti jednačinu:  $3 \cos x - 2 \sin^2 x = 0$ .
6. Dokazati da za svako  $n \in N$  važi  $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \dots + n(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$
7. Brojevi  $a < b < c$  su prva tri člana aritmetičkog niza. Ako broj  $a$  povećamo za 8, dobijamo prva tri člana geometrijskog niza. Ako je zbir ova tri člana dobijenog geometrijskog niza 26, odrediti brojeve  $a, b$  i  $c$ .
8. Neka su  $a=3$  i  $b=2$  redom dužine ivica donje i gornje osnove prave pravilne četvorostране zarubljene piramide  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Ako je  $\alpha = 45^\circ$  ugao između bočne ivice  $s$  i donje osnove  $ABCD$  naći površinu piramide.
9. Data su temena  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,0,0)$ ,  $C(1,1,0)$ ,  $D(0,1,0)$ ,  $A_1(0,0,1)$ ,  $B_1(1,0,1)$ ,  $C_1(1,1,1)$ ,  $D_1(0,1,1)$ , kocke  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
- Ako je tačka  $M$  presek dijagonala kvadrata  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , a  $N$  presek dijagonala kvadrata  $BCC_1 B$ , pokazati da su vektori  $\overrightarrow{MN}$  i  $\overrightarrow{A_1 B}$  kolinearni.
  - Odrediti ugao između vektora  $\overrightarrow{BA_1}$  i  $\overrightarrow{BC_1}$
10. Naći jednačine tangente i normalne kružnice  $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$  u tački  $(4, y_0)$ ,  $y_0 > 0$  koja joj pripada.
- Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

**REŠENJA:**

1.  $R(n) = \frac{(n-3)(n^2 + 3n + 9)}{5(n-3)} \cdot \frac{(n+3)^2 + (n-3)^2 - 2(n^2 - 9)}{(n-3)(n+3)}$
- $= \frac{1}{5}(n^2 + 3n + 9) \cdot \frac{n^2 + 6n + 9 + n^2 - 6n + 9 - 2n^2 + 18}{n^2 - 9}$   
 $= \frac{36}{5} \cdot \frac{n^2 + 3n + 9}{n^2 - 9}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36}{5} \cdot \frac{n^2 + 3n + 9}{n^2 - 9} = \frac{36}{5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 \frac{1}{n} + 9 \frac{1}{n^2}}{1 - 9 \frac{1}{n^2}} = \frac{36}{5} \cdot \frac{1 + 3 \cdot 0 + 9 \cdot 0}{1 - 9 \cdot 0} = \frac{36}{5}$

2. Polazna nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{x^2 + 2x + 9}{x-1} + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 6}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{x-1} \leq 0$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$x + 2$	-	-	+	+
$x + 3$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

Poslednju nejednakost rešavamo pomoću tabele i dobijamo da je  $x \in (-\infty, -3] \cup [-2, 1)$

3. Uvođenjem smene  $5^x = t, t > 0$  eksponencijalna jednačina se svodi na je dnačinu  $\frac{1}{5}t - 75\frac{1}{t} = 2$ , tj. na  $t^2 - 10t - 375 = 0$  čija su rešenja  $t_1 = 25, t_2 = -15$ . Zbog  $t > 0$  rešenje  $t_2$  se odbacuje, a iz  $t_1 = 25 = 5^2 = 5^x$  sledi da je  $x = 2$  jedino rešenje polazne jednačine.

4. Rešenje mora da zadovolji uslov  $x + 5 > 0, y > 0, y \neq 1$ . Sistem se primenom pravila logaritmovanja svodi na ekvivalentni sistem

$$3 \log_2(x+5) + 2 \log_3 y = -2, \quad \log_2(x+5) - \frac{1}{2} \log_3 y = 4,$$

koja se smenama  $\log_2(x+5) = t, \log_3 y = s$  svodi na sistem linearnih jedničina

$$3t + 2s = -2 \quad t - \frac{1}{2}s = 4,$$

čije je rešenje  $(t, s) = (2, -4)$ . Dakle:

$$t = 2 \Leftrightarrow \log_2(x+5) = 2 \Leftrightarrow x+5 = 2^2 \Leftrightarrow x = -1, \quad s = -4 \Leftrightarrow \log_3 y = -4 \Leftrightarrow \log_3 y = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

pa je konačno rešenje sistema  $(x, y) = \left(-1, \frac{1}{81}\right)$ .

5.  $3 \cos x - 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 3 \cos x - 2(1 - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$   
 $\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

6. Označimo sa  $T(n)$ ,  $n \in N$  dato tvrđenje. Dokaz sprovodimo indukcijom. Za  $n=1$  je

$$1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = \frac{1(1+1)(4 \cdot 1 - 1)}{6} \Leftrightarrow T$$

Predpostavimo da je

$$T(k): 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \dots + k(2k-1) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

tačno i dokažimo

$$T(k+1): 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \dots + k(2k-1) + (k+1)(2k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}.$$

Dodavanjem  $(k+1)(2k+1)$  i levoj i desnoj strani jednakosti  $T(k)$ , dobija se:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \dots + k(2k-1) + (k+1)(2k+1) &= \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} + (k+1)(2k+1) = \frac{k+1}{6} [k(4k-1) + 6(2k+1)] = \\ \frac{k+1}{6} (4k^2 + 11k + 6) &= \frac{k+1}{6} 4(k+2) \left( k + \frac{3}{4} \right) = \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}, \end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano.

7. Brojevi  $a, b, c$  su uzastopni elementi aritmetičkog niza, pa možemo napisati da je  $b=a+d$  i  $c=a+2d$ . Brojevi  $a+8, a+d$  i  $a+2d$  su uzastopni elementi geometrijskog niza, odakle sledi da je

$$(a+d)^2 = (a+8)(a+2d),$$

a njihov zbir je 26, te imamo

$$a+8+a+d+a+2d=26 \Leftrightarrow 3a+3d=18 \Leftrightarrow d=6-a$$

Uvrštavanjem ovog rezultata u predhodnu jednačinu dobija se:

$$6^2 = (a+12-2a)(a+8) \Leftrightarrow a^2 - 4a - 60 = 0 \Leftrightarrow a=10 \vee a=-6$$

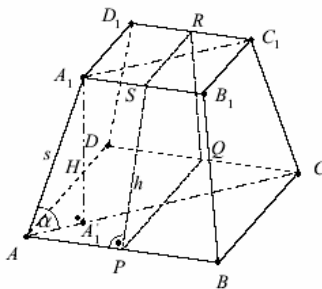
Rešenje  $a=10$  odbacujemo budući da iz njega sledi da je  $d=-4$ , što protivreči uslovu da brojevi  $a, b$  i  $c$  predstavljaju uzastopne elemente rastućeg aritmetičkog niza, tako da je jedino zadovoljavajuće rešenje  $a=-6, d=12$ , odakle su traženi brojevi  $a=-6, b=6, c=18$ .

8. Trougao  $AA_1A_1$  je jednakokrako pravougli, pa je  $AA_1 = H$  te iz jednakokrakog trapeza  $ACC_1A_1$  imamo

$$2H + b\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow H = \frac{\sqrt{2}}{2} (a-b) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Poprečni presek piramide je jednakokraki trapez  $PQRS$  čije su osnovice  $a$  i  $b$ , krak visina bočne

strane  $h$ , a visina jednaka  $H$ . Stoga je  $h = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + H^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Površina piramide je  $P = B_1 + B_2 + M = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a+b}{2} h = 13 + 5\sqrt{3}$

9. a)  $M$  sredina  $A_1C_1 \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$   $N$  sredina  $BC_1 \Rightarrow N\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\overline{MN} = \left(1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

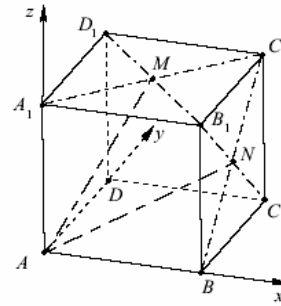
$$\overline{A_1B} = (1 - 0, 0 - 0, 0 - 1) = (1, 0, -1)$$

Dakle,  $\overline{A_1B} = 2\overline{MN}$ , pa su  $\overline{A_1B}$  i  $\overline{MN}$  kolinearni.

Napomena: Duž  $MN$  je srednja linija trougla  $C_1A_1B$

pa je  $MN \parallel A_1B$ ,

odnosno vektori  $\overline{A_1B}$  i  $\overline{MN}$  kolinearni



$$\square (\overline{BA_1}, \overline{BC_1}) = \arccos \frac{\overline{BA_1} \cdot \overline{BC_1}}{|\overline{BA_1}| |\overline{BC_1}|} = \arccos \frac{(-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

10. **I način.** Jednačina kružnice se može napisati u obliku  $x^2 + (y + 2)^2 = 25$

iz kog se vidi da na kružnici imamo dve tačke sa  $x$ -koordinatom 4:  $(4, 1)$  i  $(4, -5)$ , od kojih samo prva zadovoljava uslov  $y_0 > 0$ . Dakle, jednačinu tangente

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \text{ i normale } y - y_0 = k_n(x - x_0) \text{ tražimo u tački } (x_0, y_0) = (4, 1).$$

Eksplisitni oblik jednačine date kružnice je  $y = -2 \pm \sqrt{25 - x^2}$ . Prvi izvod je  $y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$  pa

je  $k_t = y'(4) = -\frac{4}{3}$ . Prema tome jednačina tangente je

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$$

Kako je  $k_n = -\frac{1}{k_t}$ , jednačina normale je

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 2$$

**II način.** Jednačina prave koja prolazi kroz tačku  $(4, 1)$  je  $y = k(x - 4) + 1$ . Zamenivši  $y$  u jednačinu kružnice dobijamo da je

$$x^2 + (k(x - 4) + 1)^2 + 4(k(x - 4) + 1) - 21 = 0 \Leftrightarrow (1 + k^2)x^2 + (6k - 8k^2)x + 16k^2 - 24k - 16 = 0$$

Da bi posmatrana prava bila tangenta kružnice dovoljno je da diskriminanta poslednje kvadratne jednačine po  $x$  bude jednaka nuli, tj.

$$D = (6k - 8k^2)^2 - 4(1 + k^2)(16k^2 - 24k - 16) = 0 \Leftrightarrow (3k + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$$

Dakle, jednačina tražene tangente je

$$y = -\frac{4}{3}(x - 4) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$$

odnosno normale

$$y = \frac{3}{4}(x - 4) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 2$$

1. Dat je izraz  $I(a, b) = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a - b} + a$

- a) Uprostiti dati izraz.  
b) Izračunati vrednosti datog izraza za  $a = 1 - i$ ,  $b = 2$ .

Data je funkcija  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x^2 - 1}$

2. a) Rešiti nejednačinu  $f(x) \leq 1$ .  
b) Naći  $f'(x)$

3. Rešiti nejednačinu  $4^{\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 > 0$ .

4. Rešiti sistem jednačina:  $\log_2 x + \log_9 y = 5$ .

$$\log_2 x^3 - \frac{4}{\log_y 3} = 4$$

5. Ako je  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ , izračunati  $\sin\left(\frac{13\pi}{2} - 2\alpha\right)$ .

6. Date su tačke  $U(8, 4)$ ,  $V(6, -10)$  i  $W(2, 2)$ .

- a) Pokazati da su vektori  $\overline{WU}$  i  $\overline{WV}$  ortogonalni  
b) Napisati jednačinu kružnice čiji je prečnik duž  $UV$  i jednačinu njene tangente u tački  $U$ .

7. Odrediti tri uzastopna člana opadajuće aritmetičke progresije, ako je njihov zbir 15, a zbir njihovih kubova 645.

8. Presek dijagonala jednakokrakog trapeza  $PQRS$  sa osnovicama  $PQ = a$  i  $RS = b$  je tačka  $M$ . Ako je ugao  $\sphericalangle RMS$  jednak  $120^\circ$ , dijagonala tog trapeza  $d = 6$ , a  $c = 5$ , izračunati površinu trapeza

9. Neka je kocku  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  stranice  $m$  upisana kupa čija je upisana u kvadrat  $ABCD$ , a vrh je u središtu kvadrata  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Odrediti odnos  $R : r$ , gde je  $R$  poluprečnik sfere opisane oko te kupe, a  $r$  poluprečnik sfere upisane u kupu.

10. Ako se binomni koeficijent drugog člana prema binomnom koeficijentu trećeg člana u razvoju binoma  $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^n$  odnosi kao 2:17, odredi član u razvoju koji ne zavisi od  $x$ .

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

**REŠENJA:**

1. a) Izraz je definisan za  $a \neq \pm b$ . Primenjujući obrasce za razliku kubova i razliku kvadrata, i svođenjem na zajednički imenilac dobijamo da je

$$I(a,b) = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} - \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} + a = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} - (a+b) + a$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2-ab-b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}.$$

- b) Koristeći uprošćenu formu izraza dobijenog pod a), uvrštavanjem vrednosti za  $a$  i  $b$ , dobijamo da je

$$I(1-i,2) = \frac{(1-i)^2}{1-i+2} = \frac{1-2i+i^2}{3-i} = \frac{-2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{-6i+2}{10} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

2. a) Prebacivanjem jedinice na levu stranu nejednačine i faktorisanjem polinoma u brojiocu i imeniocu, dobijamo da je

$$f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

Za određivanje znaka poslednje nejednakosti koristimo sledeću tabelu

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x-2)(x-3)$	+	+	+	-	+
$(x-1)(x+1)$	+	-	+	+	+
$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$	+	-	+	-	+

Koristeći rezultate iz table i imajući u vidu da funkcija nije definisana za  $x = -1$  i  $x = 1$ , zaključujemo da je polazna nejednačina zadovoljena za svako  $x \in (-1, 1) \cup [2, 3]$ .

$$b) f'(x) = \frac{(4x-5)(x^2-1) - 2x(2x^2-5x+5)}{(x^2-1)^2} = \frac{5x^2-14x+5}{(x^2-1)^2}$$

3. Rešenje nejednačine tražimo za  $x-2 \geq 0$ , tj. Za  $x \geq 2$ . Uvođenjem smene  $t = 2^{\sqrt{x-2}} \geq 1$  polazna nejednačina se svodi na kvadratnu nejednačinu  $t^2 - 10t + 16 > 0$  čiji je skup rešenja  $t \in (-\infty, 2) \cup (8, \infty)$ . Dakle,  $t \in [1, 2) \cup (8, \infty)$ . Vraćanjem smene dobijamo

$$1 \leq t < 2 \Leftrightarrow 2^0 \leq 2^{\sqrt{x-2}} < 2^1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-2} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-2 < 1 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$$

$$\text{Analogno, } 8 < t \Leftrightarrow 2^3 < 2^{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 9 < x-2 \Leftrightarrow 11 < x$$

Dakle skup rešenja početne nejednačine je  $x \in [2, 3) \cup (11, \infty)$

4. Koristeći osobine logaritma transformišemo system na sledeći način:

$$\log_2 x + \log_9 y = 5 \qquad \log_2 x + \frac{1}{2} \log_3 y = 5$$

$\Leftrightarrow$

$$\log_2 x^3 - \frac{4}{\log_y 3} = 4 \qquad 3 \log_2 x - 4 \log_3 y = 4$$

Zatim, prvu jednačinu predhodno pomnoženu sa  $-3$  dodajemo drugoj jednačini i dobijamo da je

$$\log_2 x + \frac{1}{2} \log_3 y = 5 \qquad \log_3 y = 2$$

$\Leftrightarrow$

$$-\frac{11}{2} \log_3 y = -11 \qquad \log_2 x = 4$$

Dakle,  $y = 3^2 = 9$  i  $x = 2^4 = 16$

5. Ako je  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ , izračunati  $\sin\left(\frac{13\pi}{2} - 2\alpha\right)$ . Svođenjem na osnovni ugao i primenom adicione formule sledi da je

$$\sin\left(\frac{13\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin\left(6\pi + \frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos 2\alpha - 0 \cdot \cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{Iz } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{25}} = \frac{25}{41}$$

$$\text{dobijamo } \sin\left(\frac{13\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2 \cdot \frac{25}{41} - 1 = \frac{9}{41}$$

6. a) Odredimo skalarni proizvod vektora  $\overline{WU} = (6, 2)$  i  $\overline{WV} = (4, -12)$ .

$$\overline{WU} \cdot \overline{WV} = (6, 2) \cdot (4, -12) = 6 \cdot 4 + 2 \cdot (-12) = 0, \text{ odnosno } \overline{WU} \perp \overline{WV}.$$

- b) Sredina duži UV,  $S = \left(\frac{8+6}{2}, \frac{4-10}{2}\right) = (7, -3)$  je centar kružnice. Poluprečnik kružnice je duž

$$SU = \sqrt{(8-7)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{50}. \text{ Jednačina tražene kružnice je } (x-7)^2 + (y-3)^2 = 50.$$

$$\text{Koeficijent pravca prave } p(SU) \text{ je } k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+3}{8-7} = 7. \text{ Koeficijent pravca}$$

tangente na kružnicu u tački U je  $k_t = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{7}$ . Jednačina tražene tangente kroz tačku

$$U(8, 4) \text{ je } y - 4 = k_t(x - 8), \text{ odnosno } y = -\frac{1}{7}x + \frac{36}{7}.$$

7. Tražene članove progresije možemo zapisati u obliku  $a + d$ ,  $a$  i  $a - d$ , gde je razlika progresije  $d > 0$ . Iz uslova da je njihov zbir 15, tada dobijamo

$$a + d + a + a - d = 15 \Leftrightarrow 3a = 15 \Leftrightarrow a = 5$$

Uvrštavanjem u uslov da je zbir kubova 645, tada dobijamo

$$(a + d)^3 + a^3 + (a - d)^3 = 645 \Leftrightarrow 3a^3 + 6ad^2 = 645 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{645 - 3 \cdot 5^3}{6 \cdot 5}} = 3$$

Dakle traženi članovi progresije su 8,5 i 2.

8. Presek dijagonala jednakokrakog trapeza  $PQRS$  sa osnovicama  $PQ = a$  i  $RS = b$  je tačka  $M$ . Ako je ugao  $\sphericalangle RMS$  jednak  $120^\circ$ , dijagonala tog trapeza  $d = 6$ , a  $c = 5$ , izračunati površinu trapeza.

Pošto je trougao  $\triangle PMQ$  jednakokrako sa uglom od  $120^\circ$  pri vrhu, sledi da je  $\sphericalangle RPQ = 30^\circ$

(slika 1). Neka je  $N$  podnožje visine  $h$  iz temena  $R$  na osnovicu  $a$ . Iz pravouglog trougla

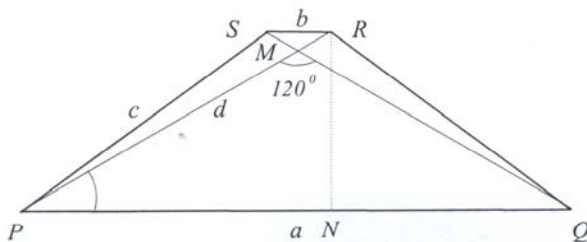
$\triangle RNP$  imamo da je  $\sin 30^\circ = \frac{h}{d}$ , odnosno  $h = \frac{6}{2} = 3$ . Iz pravougljih trouglova  $\triangle PNR$  i  $\triangle RNQ$

na osnovu Pitagorine teoreme sledi da je  $\overline{PN} = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$ , odnosno

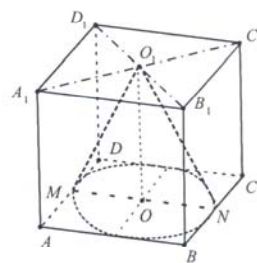
$\overline{NQ} = \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ , respektivno. Osnovica  $a = \overline{PN} + \overline{NQ} = 3\sqrt{3} + 4$ . Pošto je

$\overline{NQ} = \frac{a-b}{2}$ , drugu osnovicu možemo da dobijemo iz  $a = 3\sqrt{3} + 4$  i  $\frac{a-b}{2} = 4$ , pa sledi da je

$b = 3\sqrt{3} - 4$ . Tražena površina trapeza je  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = 9\sqrt{3}$



Slika 1.



Slika 2.

9. Neka je kocku  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  stranice  $m$  upisana kupa čija je upisana u kvadrat  $ABCD$ , a vrh je u središtu kvadrata  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Odrediti odnos  $R : r$ , gde je  $R$  poluprečnik sfere opisane oko te kupa, a  $r$  poluprečnik sfere upisane u kupu.

Poluprečnik sfere opisane (i upisane) oko kupa odgovara poluprečniku kružnice opisane (i upisane) oko njenog poprečnog preseka, tj. Jednokrakog trougla  $\triangle MNO_1$ , čija je osnovica  $MN = m$ , a kraci

su  $MO_1 = NO_1 = \sqrt{m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{m\sqrt{5}}{2}$  (slika 2).

Poluprečnik upisane kružnice nalazimo iz izraza

$$r = \frac{2P}{O} = \frac{2 \frac{m \cdot m}{2}}{m + \frac{m\sqrt{5}}{2} + \frac{m\sqrt{5}}{2}} = \frac{m}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{m\sqrt{5}-1}{4}.$$

Poluprečnik upisane kružnice dobijamo pomoću sinusne teoreme  $R = \frac{b}{2 \sin \beta}$ , gde je  $b$  proizvoljna stranica trougla  $\triangle MNO_1$ , a  $\beta$  je ugao koji se nalazi naspram te stranice.

Kako iz pravouglog trougla  $\square ONO_1$  sledi da je  $\sin \angle ONO_1 = \frac{m}{\frac{m\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , primenom sinusne

teoreme na stranici  $MO_1$  i ugao kod temena  $N$  dobijamo da je  $R = \frac{\frac{m\sqrt{5}}{2}}{2 \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5m}{8}$ .

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{5m}{8}}{\frac{m\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{5}{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{5(\sqrt{5}-1)}{8}.$$

10. Ako se binomni koeficijent drugog člana prema binomnom koeficijentu trećeg člana u razvoju binoma  $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^n$  odnosi kao 2:17, odredi član u razvoju koji ne zavisi od  $x$ .

Binimni koeficijent drugog i trećeg člana se odnose kao 2:17, odnosno

$$\binom{n}{1} : \binom{n}{2} = 2 : 17 \Leftrightarrow n : \frac{n(n-1)}{2} = 2 : 17 \Leftrightarrow 17n = n(n-1) \Leftrightarrow n = 18.$$

Znamo da je  $(k+1)$ -vi član u razvoju binoma  $(x - x^{-2})^{18}$  jednak

$$\binom{18}{k} x^{18-k} (-x^{-2})^k = \binom{18}{k} (-1)^k x^{18-3k} \text{ za } k = 0, 1, \dots, 17.$$

Za član koji ne sadrži  $x$  mora da važi  $18 - 3k = 0$ , odnosno  $k = 6$ . Dakle, sedmi član zavisi od  $x$  i taj član je jednak

$$\binom{18}{6} (-1)^6 = \binom{18}{6}.$$

1. Izračunati vrednost izraza  $\left( \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^3} \right)^{-3}$
2. Naći sve vrednosti  $m \in \mathbb{R}$  tako da funkcija  $y = (2-m)x^2 + (2m-5)x + 2$  ima minimum i dve različite realne nule.
3. Data je funkcija  $f(x) = x - \frac{x^2 + x + 19}{2x + 5}$ .
  - a) Rešiti nejednačinu  $f(x) \geq 1$ .
  - b) Naći  $f'(x)$
4. Rešiti sistem jednačina
 
$$5 \cdot 2^x - 3^y = 133$$

$$3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 150$$
5. Rešiti jednačinu  $\log_2 \sqrt[3]{x} - \log_4 x^3 + 2 \log_8 x = \frac{3}{2}$ .
6. Rešiti jednačinu  $2 \cos^2 x + 7 \sin x - 5 = 0$
7. Dati su kompleksni brojevi  $b_1 = 1 + 2i, b_2 = 4 + 3i$  i  $b_3 = 11 + 2i$ .
  - a) Naći količnik  $q = \frac{b_2}{b_1}$ .
  - b) Pokazati da brojevi  $b_1, b_2, b_3$ , tim redom, čine prva tri člana geometrijskog niza i naći zbir prvih pet članova ovog niza.
8. Ako je  $A(-2, -2, 0)$ ,  $\overline{AB} = (6, -1, 1)$  i  $\overline{AD} = (2, 3, 1)$ , odrediti temena  $B, C$  i  $D$  i presek dijagonala  $T$  paralelograma  $ABCD$ .
9. Oko kružnice prečnika  $3\text{cm}$  je opisan pravougli trapez površine  $12\text{cm}^2$ . Izračunati dužine osnovica.
10. Prva pravilna četvorostrana piramida osnovne ivice  $a = 12\sqrt{2}\text{cm}$  i bočne ivice  $s = 13\text{cm}$  presečena je ravni koja je paralelna osnovi, a koja visinu deli na dva jednaka dela. Izračunati površinu dobijene zarubljene piramide.

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

## REŠENJA:

Na osnovu osobina parnog i neparnog korena i primenom formule za kub binoma, dati izraz se

1. transformiše na sledeći način:

$$\left( \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^3} \right)^{-3} = \left( \left| \frac{3}{2} - \sqrt{3} \right| + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \right)^{-3} = \left( \sqrt{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \right)^{-3} = (-1)^{-3} = -1$$

2. Kvadratna funkcija ima minimum ako je  $2 - m > 0$ , a ima realne različite nule ako je  $D > 0$ .

$$D = (2m - 5)^2 - 4 \cdot (2 - m) \cdot 2 = 4m^2 - 20m + 25 - 16 + 8m = 4m^2 - 12m + 9 = (2m - 3)^2,$$

$$\text{Pa je } D > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

$$\text{Dakle, } 2 - m > 0 \wedge D > 0 \Leftrightarrow m < 2 \wedge m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

3. a)  $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 5x - x^2 - x - 19 - 2x - 5}{2x + 5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 24}{2x + 5} \geq 0.$

Kako je  $x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 4$  i  $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ , za rešavanje

nejednačine koristimo tabelu

	$(-\infty, -6)$	$(-6, \frac{5}{2})$	$(-\frac{5}{2}, 4)$	$(4, +\infty)$
$x^2 + 2x - 24$	+	-	-	+
$2x + 5$	-	-	+	+
$\frac{x^2 + 2x - 24}{2x + 5}$	-	+	-	+

Koristeći rezultate iz tabele i imajući u vidu da funkcija nije definisana za  $x = -\frac{5}{2}$ , zaključujemo da je polazna nejednačina tačna za svako  $x \in [-6, -\frac{5}{2}) \cup [4, +\infty)$

$$b) \text{ Iz } f(x) = \frac{x^2 + 4x - 19}{2x + 5} \text{ je } f'(x) = \frac{(2x + 4)(2x + 5) - 2(x^2 + 4x - 19)}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 58}{(2x + 5)^2}.$$

4. Nakon uvođenja smene  $2^x = p$  i  $3^y = q$ , dobija se:

$$5p - q = 133 \cdot 2 \Leftrightarrow 5p - q = 133 \Leftrightarrow p = 32 \Leftrightarrow p = 32$$

$$3p + 2q = 150 \quad 13p = 416 \quad q = 5p - 133 \quad q = 27.$$

Iz  $2^x = 2^5$  i  $3^y = 3^3$  sledi da je rešenje  $(x, y) = (5, 3)$ .

5. Koristeći osobinu  $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$ , za  $x > 0$ , datu jednačinu transformišemo na sledeći način:

$$\log_2 \sqrt[3]{x} - \log_4 x^3 + 2 \log_8 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_2 x - \frac{3}{2} \log_2 x + \frac{2}{3} \log_2 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = -3 \Leftrightarrow x = 2^{-3}$$

6.  $2(1 - \sin^2 x) + 7 \sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 + 7 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 7t - 3 = 0 \wedge t = \sin x \Leftrightarrow$

$$(t = 3 \vee t = \frac{1}{2}) \wedge t = \sin x$$

Zbog  $t \in [-1, 1]$  ostaje samo rešenje za koje je  $\sin x = \frac{1}{2}$ , tj.

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

7. a)  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{4+3i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{4+3i-8i-6i^2}{1-4i^2} = \frac{10-5i}{5} = 2-i.$

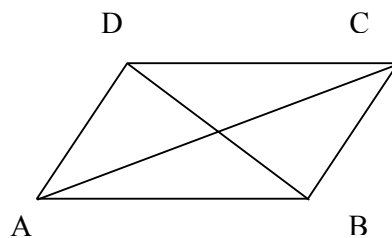
b) Iz  $q \cdot b_2 = (2-i)(4+3i) = 11+2i = b_3$  sledi da brojevi  $b_1, b_2$  i  $b_3$  čine prva tri člana geometrijskog niza sa količnikom  $q$ . Četvrti i peti član ovog niza dobijamo iz  $b_4 = b_3 \cdot q = (11+2i)(2-i) = 24-7i$  i  $b_5 = b_4 \cdot q = (24-7i)(2-i) = 41-38i$ . Zbir prvih pet članova ovog niza je  $S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 81-38i$ .

8. Neka su koordinate traženih temena  $B(x_1, y_1, z_1)$ ,  $C(x_2, y_2, z_2)$  i  $D(x_3, y_3, z_3)$ .

$$\overline{AB} = (6, -1, 1) \Leftrightarrow (x_1 + 2, y_1 + 2, z_1) = (6, -1, 1) \Rightarrow B(4, -3, 1).$$

$$\overline{AD} = (2, 3, 1) \Leftrightarrow (x_3 + 2, y_3 + 2, z_3) = (2, 3, 1) \Rightarrow D(0, 1, 1).$$

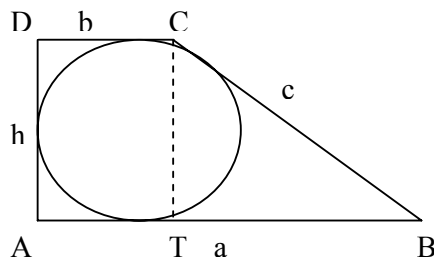
$$\overline{DC} = \overline{AB} \Leftrightarrow (x_2, y_2 - 1, z_2 - 1) = (6, -1, 1) \Rightarrow C(6, 0, 2).$$



Presek dijagonala  $T$  je ujedno i središte duži  $AC$ , pa su njegove koordinate

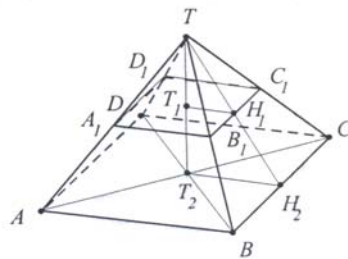
$$T\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow T(2, -1, 1).$$

9. Očigledno je da je visina trapeza  $h$  jednaka prečniku upisane kružnice, tj.  $h=3$ . površina trapeza  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$  je na osnovu zadatka jednaka 12, tj.  $\frac{a+b}{2} \cdot 3 = 12$ , odakle sledi  $a+b=8$ . Iz uslova o tangentsnom četvorouglu, imamo da je  $a+b=c+h$ , odnosno  $a+b=c+3$ . Iz dobijenih veza sledi da je  $8=c+3$ , tj.  $c=5$ . Primenjujući Pitagorinu teorem u pravouglom trouglu  $CTB$  dobijamo da je  $c^2 = h^2 + (a-b)^2$  što zamenom  $c$  i  $h$  daje  $a-b=4$ . Sada, iz sistema jednačina  $a+b=8$  i  $a-b=4$  imamo da su osnovice trapeza  $a=6$  i  $b=2$ .



10. Iz sličnosti trouglova  $\Delta TT_1H_1$  i  $\Delta TT_2H_2$  sledi da je  $T_1H_1 = \frac{1}{2}T_2H_2 = \frac{a}{4}$  tj.  $A_1B_1 = 6\sqrt{2}$ . Iz pravouglom trougla  $\square CTH_2$  sledi da je visina bočne stranice  $h = TH_2 = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 36 \cdot 2} = \sqrt{97}$ , pa je iz sličnosti pomenutih trouglova  $H_1H_2 = \frac{1}{2}TH_2 = \frac{\sqrt{97}}{2}$ . Sada je:

$$P = B_1 + B_2 + M = (6\sqrt{2})^2 + (12\sqrt{2})^2 + 4 \cdot \frac{6\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{97}}{2} = 360 + 18\sqrt{194}$$



1. Odrediti realni parametar  $a$  tako da rešenja  $x_1$  i  $x_2$  jednačine  $x_2 + (a-2)x - a + 1 = 0$  zadovoljavaju uslov  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{3}$

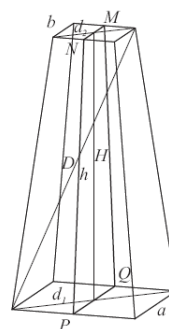
2. Rešiti nejednačinu  $\frac{x^2 - 6x + 6}{x - 4} < 1$

3. Rešiti jednačinu  $4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x+1} = 16$

4. Rešiti jednačinu  $\log_2^2(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2 = 3$

5. Rešiti jednačinu  $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(2 + \sin 2x) = 2$ .

6. Ako su  $B_1 = 8$  i  $B_2 = 2$  površine osnova prave pravilne zarubljene četvorostrane piramide zapremine  $V = 28$ , izračunati površinu njenog omotača  $M$  i dužinu prostorne dijagonale  $D$ .



7. Neka su  $A(2,1,-2)$ ,  $B(4,0,-1)$  i  $C(4,3,2)$  tri uzastopna temena paralelograma  $ABCD$ . Izračunati koordinate temena  $D$  i površinu paralelograma  $ABCD$ .
8. Dužine stranica pravouglog trougla obrazuju aritmetički niz. Ako je površina trougla  $P = \frac{3}{2}$ , izračunati dužine stranica i poluprečnik upisane kružnice.
9. Odrediti jednačinu tangente na parabolu  $y^2 = x$  u onoj presečnoj tački sa pravom  $y = -x+2$  koja se nalazi u I kvadrantu.
10. Data je funkcija  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
- Izračunati vrednost funkcije  $f$  u tački  $x = (1 - \sqrt{2})^2$
  - Izračunati  $f'(4)$
  - Izračunati  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

## REŠENJA:

1. Iz Vijetovih formula imamo:  $x_1x_2 = 1-a$ ,  $x_1+x_2 = 2-a$ . Odatle je

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(2-a)^2 - 2(1-a)}{1-a} = \\ &= \frac{a^2 - 2a + 2}{1-a} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 6a + 6 = 10 - 10a \wedge a \neq 1 \Leftrightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}. \end{aligned}$$

2.  $\frac{x^2 - 6x + 6}{x-4} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 6 - x + 4}{x-4} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 10}{x-4} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-5)}{x-4} < 0$

Ispitivanjem znaka činilaca izraza sa leve strane dobijamo  $x \in (-\infty, 2) \cup (4, 5)$ .

3. Smenom  $2^{x+1} = t$  dobijamo  $t^2 - 15t - 16 = 0$   $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 16$ .  
Prvo rešenje odbacujemo zbog  $2^{x+1} > 0$ , a iz drugog sledi  $2^{x+1} = 16 = 2^4 \Leftrightarrow x = 3$ .

4. Data jednačina je definisana za  $x > -2$ . Koristeći pravila logaritmovanja dobijamo  $\log_2^2(x+2) - 2\log_2(x+2) = 3$ . Uvođenjem smene  $\log_2(x+2) = t$  dobijamo jednačinu  $t^2 - 2t - 3 = 0$ , čija su rešenja  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 3$ . Vraćanjem smene dobijamo:  
 $\log_2(x+2) = -1 \Leftrightarrow x+2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ ;  $\log_2(x+2) = 3 \Leftrightarrow x+2 = 8 \Leftrightarrow x = 6$ , tako da  $x \in \{-\frac{3}{2}, 6\}$

5.  $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(2 + \sin 2x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot (2 + 2 \sin x \cos x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1 + \sin x \cos x) = 1$   
 $\Leftrightarrow 1 + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x + \cos x) = 0$   
 $\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

6. Iz formule za zapreminu zarubljene piramide možemo izračunati njenu visinu:  $28 = \frac{1}{3}H(8 + 2 + \sqrt{8 \cdot 2}) \Leftrightarrow H = 6$ . Iz površina baza dobijamo dužine ivica i dijagonala osnova:

$$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}, d_1 = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4, d_2 = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

Iz poprečnog preseka  $MNPQ$  računamo visinu bočne strane

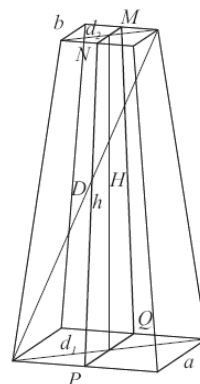
$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{73}{2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{73}{2}}.$$

Sada možemo izračunati površinu omotača:

$$M = 4 \frac{a+b}{2} h = 4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{73}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{73}$$

i dužinu dijagonale piramide:

$$D^2 = H^2 + \left(d_1 - \frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 = 45 \Rightarrow D = 3\sqrt{5}.$$



7. Neka je  $D(x, y, z)$ . Iz jednakosti vektora  $\vec{AB} = \vec{DC}$  sledi  $(2, -1, 1) = (4-x, 3-y, 2-z) \Rightarrow D(2, 4, 1)$ . Površina paralelograma predstavlja intenzitet vektorskog proizvoda vektora  $\vec{AB}$  i  $\vec{AD} = (0, 3, 3)$ :

$$P_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = |(-6, -6, 6)| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

8. Na osnovu odnosa veličina stranica pravouglog trougla označićemo katete sa  $a - d$  i  $a$  a hipotenuzu sa  $a + d$ . Iz Pitagorine teoreme sledi

$$(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2 \Rightarrow a^2 - 2ad + d^2 + a^2 = a^2 + 2ad + d^2 \Rightarrow a(a - 4d) = 0 \Rightarrow d = \frac{a}{4}.$$

Površina trougla  $P = \frac{1}{2}a(a - d) = \frac{1}{2}a(a - \frac{a}{4}) = \frac{3}{2}$ , odakle sledi  $\frac{3a^2}{4} = 3$ , što daje  $a = 2$  i  $d = \frac{1}{2}$ .

Dužine stranica su  $\frac{3}{2}$ ,  $2$  i  $\frac{5}{2}$ , a poluprečnik upisane kružnice  $r$  dobijamo iz formule za površinu

$$P = r \frac{O}{2} \Rightarrow r = \frac{2P}{O} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{2}.$$

9. Presečne tačke  $(x, y)$  se dobijaju rešavanjem sistema jednačina prave i parabole:

$$y = -x + 2 \wedge (-x + 2)^2 = x \Leftrightarrow y = -x + 2 \wedge x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 4) \wedge y = -x + 2 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1, 1), (4, -2)\}.$$

Samo tačka  $(1, 1)$  pripada prvom kvadrantu. Tangenta u toj tački ima oblik  $t: y - 1 = k(x - 1)$ , gde je  $k = f'(1)$ . U prvom kvadrantu važi  $y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ , pa je  $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$ ,

što daje jednačinu tangente  $t: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

10. a)  $f((1 - \sqrt{2})^2) = \frac{\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 - 1}}{(1 - \sqrt{2})^2 - 1} = \frac{|1 - \sqrt{2}| - 1}{1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1 - 1}{2 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- b)  $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 1) - (\sqrt{x} - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(x - 1)^2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{1}{36}$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$ .

1. Neka su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja jednačine  $(x + 1) : (5 - x) = (x + m) : (x - 1)$ . Odrediti  $m$  tako da važi  $x_1^2 + x_2^2 < 26$ .
2. Data je funkcija  $f(x) = \frac{2x^2 - 14}{x^2 + x - 12}$ .
  - (a) Rešiti nejednačinu  $f(x) \geq 1$ .
  - (b) Izračunati  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. Rešiti jednačinu  $5^{x-1} - 5^{2-x} = 4$ .
4. Rešiti nejednačinu  $2 \log_2 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{3}}(4x^2) > 2$ .
5. Rešiti jednačinu  $2 \sin^2 x - 2\sqrt{2} \cos x = 5$ .
6. Koliko članova rastuće aritmetičke progresije treba sabrati da bi se dobio zbir 3, ako je  $a_1 + a_6 = 1$  i  $a_3^2 = 4$ ?
7. Dokazati da za svako  $n \in \mathbb{N}$  važi  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ .
8. U četvorouglu  $ABCD$  stranica  $AD = 2$  i stranica  $BC = 2\sqrt{6}$ . Dijagonala  $BD$  je normalna na stranicu  $BC$ . Odrediti stranicu  $CD$  ako se zna da je  $\angle ABC = \angle BAD = 120^\circ$ .
9. Odrediti jednačinu tangente parabole  $y^2 = 2x$  u onoj tački preseka parabole sa pravom  $x - 2y - 6 = 0$  koja se nalazi u IV kvadrantu.
10. Data je prava pravilna četverostrana piramida kod koje je ivica osnove  $a = 5\sqrt{2}$  i bočna ivica  $s = 13$ . Izračunati ivicu kocke koja je upisana u piramidu tako da se gornja temena kocke nalaze na bočnim ivicama piramide.

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

## REŠENJA:

1. Očigledno, za rešenja jednačine mora da važi  $x \neq 5$  i  $x \neq 1$ . Kad se data jednačina pomnoži izrazom  $(5-x)(x-1)$  i sredi, dobije se kvadratna jednačina

$$2x^2 + (m-5)x - 1 - 5m = 0.$$

Notacija kvadratnog trinoma  $ax^2 + bx + c$  daje  $a = 2$ ,  $b = m - 5$ ,  $c = -1 - 5m$ .  
Koristeći Vietove formule imamo

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \left(-\frac{m-5}{2}\right)^2 - 2\frac{-1-5m}{2} < 26.$$

Poslednja nejednakost je ekvivalentna

$$m^2 + 10m - 75 < 0.$$

Rešavajući ovu kvadratnu nejednačinu po  $m$  dobijamo

$$m_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 75}}{2}, m_1 = -15, m_2 = 5, \text{ pa } m \in (-15, 5).$$

Nedozvoljeno rešenje  $x = 1$  u kvadratnoj jednačini (1) daje  $-4 - 4m = 0$ , odnosno  $m = -1$ , a  $x = 5$  nije rešenje jednačine (1) ni za jednu vrednost parametra  $m$ . Isključivanjem vrednosti  $m = -1$  iz dobijenog intervala za  $m$  dobijamo konačno rešenje

$$m \in (-15, -1) \cup (-1, 5).$$

2.

$$(a) \quad f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 14}{x^2 + x - 12} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 4$	-	+	+	+	+
$x + 1$	-	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	+
$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12}$	+	-	+	-	+

Odgovor čitamo iz tabele:  $x \in (-\infty, -4) \cup [-1, 2] \cup (3, +\infty)$ .

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 14}{x^2 + x - 12} \cdot \frac{x^{-2}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{14}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0 - 0} = 2.$$

3. Uvodimo smenu  $5^{x-1} = t$ . Dobijamo

$$t - \frac{5}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 5.$$

Negativno rešenje, zbog  $5^{x-1} > 0$ , odbacujemo, vraćamo smenu i dobijamo

$$t = 5^{x-1} = 5^1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

4. Data nejednačina je definisana za  $x > 0$  i ekvivalentna nejednačini

$$\log_2 x - \log_2 4 - 2 \log_2 x > 2 \Leftrightarrow -\log_2 x > 4 \Leftrightarrow \log_2 x < -4.$$

$$\text{Odatle zaključujemo } x \in (0, 2^{-4}) = \left(0, \frac{1}{16}\right).$$

5. Primenom osnovnih algebarskih operacija i Pitagorine teoreme:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , dobijamo:

$$2 \sin^2 x - 2\sqrt{2} \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2\sqrt{2} \cos x + 3 = 0.$$

Smena  $\cos x = t$  daje

$$2t^2 + 2\sqrt{2}t + 3 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 24}}{2}.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednačine je negativna:  $8 - 24 = -16$  pa data jednačina nema rešenja u skupu realnih brojeva.

6. Prvo ćemo iz datih jednakosti naći prvi član niza  $a_1$  i razliku  $d$ .

$$a_1 + a_1 + 5d = 1 \wedge (a_1 + 2d)^2 = 4 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1 - 5d}{2} \wedge \left( \frac{1 - 5d}{2} + 2d \right)^2 = (\pm 2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 5d + 4d}{2} = 2 \vee \frac{1 - 5d + 4d}{2} = -2 \Leftrightarrow d = -3 \vee d = 5.$$

Odbacujemo vrednost  $d = -3$  jer daje opadajući niz. Dobijamo  $a_1 = \frac{1 - 5 \cdot 5}{2} = -12$ . Suma  $n$  sabiraka aritmetičkog niza je  $S_n = (a_1 + a_n + (n - 1)d) \frac{n}{2}$ . Rešavamo jednačinu  $S_n = 3$ .

$$(-12 - 12 + (n - 1) \cdot 5) \frac{n}{2} = 3 \Leftrightarrow 5n^2 - 29n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6.$$

(Rešenje poslednje kvadratne jednačine  $n = -\frac{1}{5}$  odbacujemo jer nije ceo broj.)

7. Dokazaćemo shemom matematičke indukcije po  $n$ .

$$\begin{array}{l} n = 1 \quad \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{3 + 1} \\ n \rightarrow n + 1 \end{array}$$

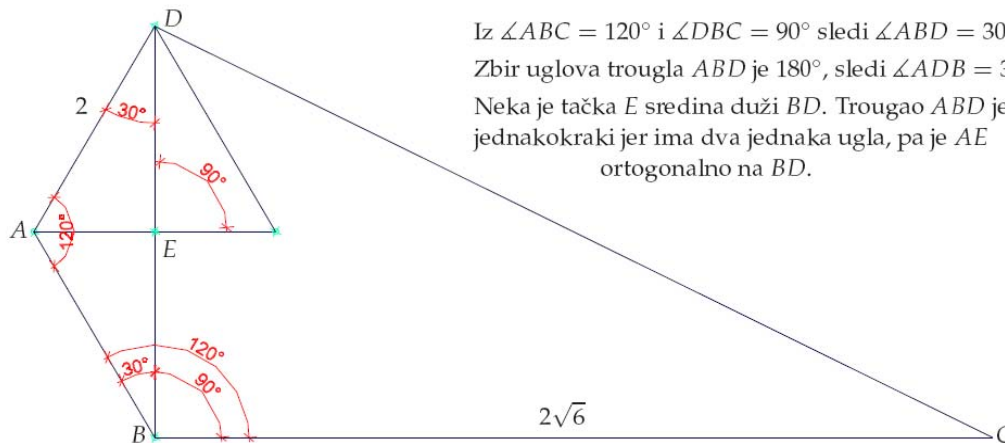
$$\overbrace{\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)}}^{(*)} + \frac{1}{(3(n + 1) - 2)(3(n + 1) + 1)} =$$

(\*) - Koristimo induksijsku pretpostavku:

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{3n + 1} + \frac{1}{(3n + 1)(3n + 4)} = \frac{n(3n + 4) + 1}{(3n + 1)(3n + 4)} = \\ &= \frac{3n^2 + 4n + 1}{(3n + 1)(3n + 4)} = \frac{3n^2 + n + 3n + 1}{(3n + 1)(3n + 4)} = \frac{n(3n + 1) + 3n + 1}{(3n + 1)(3n + 4)} = \\ &= \frac{(3n + 1)(n + 1)}{(3n + 1)(3n + 4)} = \frac{n + 1}{3n + 4} = \frac{n + 1}{3(n + 1) + 1}. \end{aligned}$$

Time je dokaz shemom matematičke indukcije završen.

- 8.



Iz  $\angle ABC = 120^\circ$  i  $\angle DBC = 90^\circ$  sledi  $\angle ABD = 30^\circ$   
Zbir uglova trougla  $ABD$  je  $180^\circ$ , sledi  $\angle ADB = 30^\circ$ .  
Neka je tačka  $E$  sredina duži  $BD$ . Trougao  $ABD$  je jednakokraki jer ima dva jednaka ugla, pa je  $AE$  ortogonalno na  $BD$ .

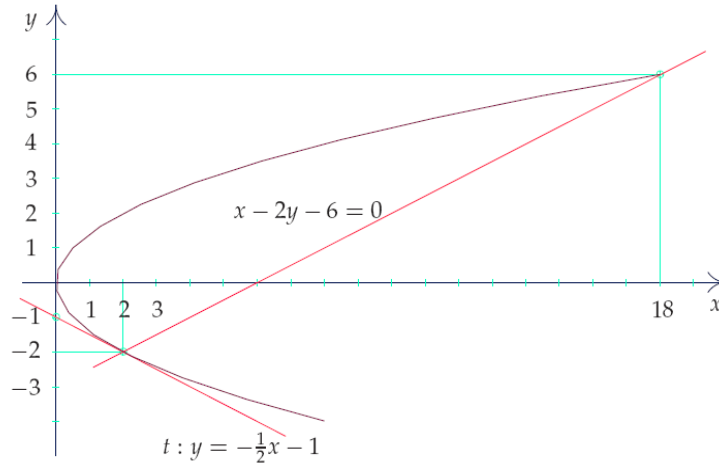
Vidi se da je trougao  $AED$  polovina jednakostraničnog trougla, pa je  $ED = AD \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .  
Onda je  $BD = 2ED = 2\sqrt{3}$ .

Iz pravouglog trougla  $DBC$  dobijamo  $CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4 \cdot 6} = 6$ .

9. Apscise presečnih tačaka dobijamo smenjivanjem ordinate  $y = \frac{1}{2}x - 3$  iz jednačine prave u jednačinu parabole:

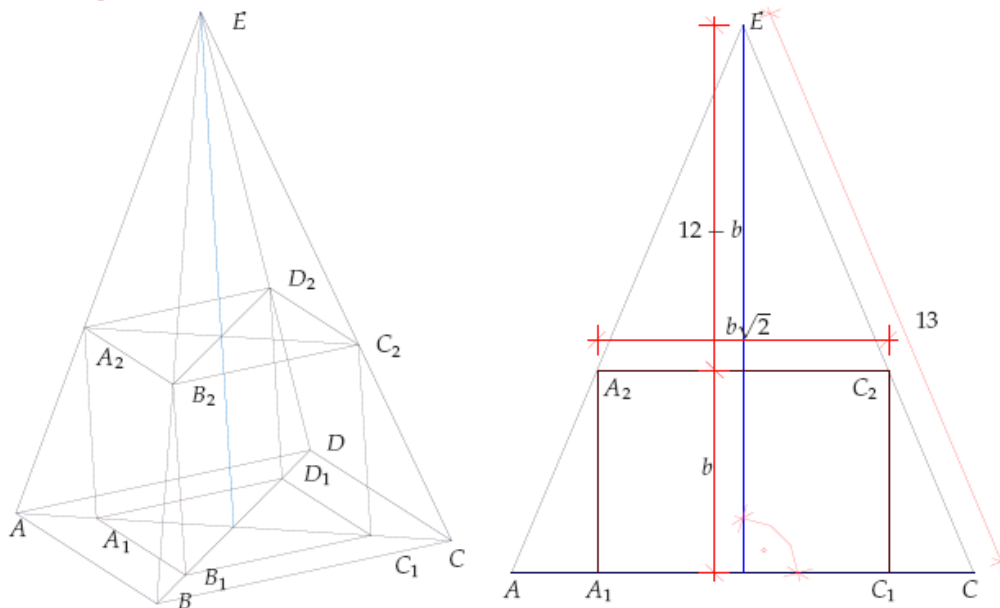
$$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 20x + 36 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = 18.$$

Ordinate dobijamo iz jednačine prave. Presečne tačke su  $A(2, -2)$  i  $B(18, 6)$ , tačka  $A$  je u IV kvadrantu.



U tački  $A$  jednačina parabole je  $y = -\sqrt{2x}$ , prvi izvod je  $y' = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$ , koeficijent pravca tražene tangente je  $k = y'(x_1) = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = -\frac{1}{2}$ . Jednačina tangente je  $t: y - (-2) = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$ .

- 10.



Neka su temena osnove piramide  $A, B, C$  i  $D$ , neka je vrh  $E$ . Neka su temena upisane kocke na osnovi piramide  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , a na bočnim ivicama  $A_2, B_2, C_2$  i  $D_2$ . Neka je  $b = A_1B_1$  tražena ivica. Dijagonala osnove piramide je  $AC = 5\sqrt{2}\sqrt{2} = 10$ , dijagonala osnove kocke je  $A_2C_2 = b\sqrt{2}$ . Pitagorina teorema za polovinu jednakokrakog trougla  $ACE$  daje visinu piramide  $H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ . Iz sličnosti trouglova  $ACE$  i  $A_2C_2E$  sledi proporcija:

$$\frac{12 - b}{12} = \frac{b\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow 120 - 10b = 12\sqrt{2}b \Leftrightarrow b = \frac{120}{12\sqrt{2} + 10} = \frac{60}{6\sqrt{2} + 5} = \frac{360\sqrt{2} - 300}{47}.$$

1. a) Izračunati  $\frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{2^{-2}}{3}\right)^{-2} : 2$ ; 2 boda)  
 b) Uprostiti izraz  $\left(a - \frac{27}{a^2}\right) : \frac{a^2 + 3a + 9}{a^2}, a \neq 0$ . (2 boda)
2. Rešiti nejednačinu  $\frac{(x+2)^2 - (x+1)^2}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$ . (6 bodova)
3. Cena jednog proizvoda uvećana je za 20% , a potom je snižena za 20% . Za koliko procenata se krajnja cena razlikuje od prvobitne? (4 boda)
4. a) Izračunati  $\frac{\cos 75^0}{\sin 45^0}$ ; (4 boda)  
 b) Rešiti jednačinu  $2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ . (6 bodova)
5. Rešiti jednačine  
 a)  $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$  (4 boda)  
 b)  $\log_6(x+1) + \log_6(2x+1) = 1$ . (4 boda)

**REŠENJA:**

1. a)  $\frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{2^{-2}}{3}\right)^{-2} : 2 = 1$   
 b)  $\left(a - \frac{27}{a^2}\right) : \frac{a^2 + 3a + 9}{a^2} = \frac{a^3 - 3^3}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + 3a + 9} = a - 3$
2.  $x \in \left[-\frac{3}{1}, 1\right) \cup (2, \infty)$
3. Neka je početna cena  $x$  dinara. Po uslovu zadatka, konačna cena je  $x \cdot 1.2 \cdot 0.8 = 0.96x$  dinara. Dakle, cena je smanjena za 4%
4.  $\frac{\cos 75^0}{\sin 45^0} = \frac{\cos(30^0 + 45^0)}{\sin 45^0} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$   
 Iz  $2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  sledi da je  $2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$  te je skup rešenja date jednačine  $\left\{-\frac{\pi}{12} + k_1\pi : k_1 \in Z\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k_2\pi : k_2 \in Z\right\}$ .
5. a) Iz  $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ , sledi da je  $(5^x)^2 - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ , tj. da je rešenje date jednačine  $x = 1$  ;  
 b) Data jednačina je definisana za  $x > -\frac{1}{2}$ . Iz  $\log_6(x+1) + \log_6(2x+1) = 1$  sledi da je  $\log_6(x+1) \cdot (2x+1) = 1$ , tj.  $(x+1) + (2x+1) = 6$ . Zbog oblasti definisanosti rešenje date jednačine je samo realan broj  $x = 1$ .

1. a) Izračunati  $\frac{2\sqrt{27}-\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$  (2 boda)

b) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{a^2+1}{3a-1}-\frac{a}{3}\right)\cdot\left(\frac{2+4a}{a+3}-1\right), \quad a \notin \left\{\frac{1}{3}, -3\right\}. \quad (2 \text{ boda})$$

2. Rešiti nejednačinu  $\frac{2x+1}{x-2} \leq 0$  (2 boda)

3. Cena jedne košulje je 500 dinara. Posle poskupljenja košulje za 5% došlo je do pojeftinjenja za 10%. Kolika je nova cena košulje? (4 boda)

4. Izračunati

a)  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}$  ako je  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ;      b)  $\sin \frac{81\pi}{4}$  (4 boda)

5. Rešiti jednačine

a)  $2^{x^2-5x+9} = 8$ ;      b)  $\log_6 x + \log_6(x-3) = \log_6 4$  (4 boda)

**REŠENJA:**

1) a)  $\frac{2\sqrt{27}-\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$

b)  $\left(\frac{a^2+1}{3a-1}-\frac{a}{3}\right)\cdot\left(\frac{2+4a}{a+3}-1\right) = \frac{3a^2+3-3a^2+a}{3(3a-1)} \cdot \frac{2+4a-a-3}{a+3} = \frac{3+a}{3(3a-1)} \cdot \frac{3a-1}{a+3} = \frac{1}{3}$

2)  $\frac{2x+1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right)$ .

3) 1: 500 din

2:  $500 + \frac{5}{100} \cdot 500 = 525$  din

3:  $525 - \frac{10}{100} \cdot 525 = 472.5$  din

4) a)  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{2 \operatorname{tg} \alpha - 4} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{2} - 4} = -\frac{1}{2}$ .

b)  $\sin \frac{81\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 20\pi\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

5) a)  $2^{x^2-5x+9} = 8$

$$2^{x^2-5x+9} = 2^3$$

$$x^2 - 5x + 9 = 3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x \in \{2, 3\}$$

b)  $\log_6 x + \log_6(x-3) = \log_6 4$

$$\log_6 x(x-3) = \log_6 4$$

$$x(x-3) = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = 4, x = -1$$

Zbog definisanosti *log.* funkcije rešenje je samo  $x=4$

- Uprostiti izraz  $\frac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} : \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$ ,  $ab \neq 0, a \neq \pm b$ . (6 bodova)
- Rešiti nejednačinu  $\frac{3x+2}{4x-4} \leq 1$ . (6 bodova)
- Ako je  $\frac{9\sin \alpha - 3\cos \alpha}{2\sin \alpha + \cos \alpha} = 2$  odrediti  $\operatorname{tg} \alpha$  i ugao  $\alpha$ . (6 bodova)
- Rešiti jednačinu  $\log_3 x + \log_x 3^4 + 5 = 0$ . (6 bodova)
- Knjiga je prvo pojeftinila za 25%, a zatim je poskupela za 30%. Da li je sada knjiga jeftinija ili skuplja od prvobitne cene i za koliko procenata? (6 bodova)

**REŠENJA:**

- Izraz je definisan za  $ab \neq 0$  i  $a^2 \neq b^2$ .  

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} : \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} = \frac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} = \frac{a(a^2+b^2-ab)}{a-b} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a^2+b^2-ab)} = a.$$
- Data nejednačina je definisana za  $x \neq 1$ .  

$$\frac{3x+2}{4x-4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{4x-4} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-x}{4x-4} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [6, \infty).$$
- $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ , smena  
 $t = \cos x, \quad 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow l_1 = 1, \quad l_2 = -\frac{1}{2} \cdot l_1 = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in Z,$   
 $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$
- Data jednačina je definisana za  $x > 0$  i  $x \neq 1$ .  
 $\log_3 x + \log_x 3^4 = 5 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 5\log_3 x + 4 = 0$ . Ako stavimo  $\log_3 x = t$  dobijamo kvadratnu jednačinu  $t^2 + 5t + 4 = 0$  sa rešenjima  
 $t_1 = -1, t_2 = -4. \log_3 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}; \log_3 x = -4 \Rightarrow x = \frac{1}{81}$ . Skup rešenja je  $\left\{ \frac{1}{81}, \frac{1}{3} \right\}$ .
- Neka je početna cena  $x$  dinara. Po uslovu zadatka, konačna cena je  $x \cdot 0,75 \cdot 1,3 = 0,975x$  dinara. Dakle, knjiga je jeftinija za 2,5%.

1. Izračunati  $(4 \cdot (\frac{2}{x})^{-2})^3 \cdot \sqrt{\frac{x}{16}} : (\frac{x^3}{4})^2$ ,  $x > 0$ . (6 bodova)
2. Naći  $m (m \neq 0)$ , za koje je jedan koren (nula) jednačine  $x^2 - 4mx + m^3 = 0$ . (6 bodova)
3. Rešiti jednačinu  $2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ . (6 bodova)
4. Rešiti jednačinu  $9^x + 3^x - 2 = 0$ . (6 bodova)
5. Koliko ljudi živi u gradu u kome je godišnji priraštaj stanovnika 3,5%, odnosno 1330 stanovnika. (6 bodova)

**REŠENJA:**

1. Za  $x > 0$ 

$$(4 \cdot (\frac{2}{x})^{-2})^3 \cdot \sqrt{\frac{x}{16}} : (\frac{x^3}{4})^2 = (4 \cdot \frac{x^2}{4})^3 \cdot \frac{\sqrt{x}}{4} \cdot \frac{16}{x^6} = x^6 \cdot \frac{\sqrt{x}}{4} \cdot \frac{16}{x^6} = 4\sqrt{x}.$$
2. Neka je  $x_1 = 3x_2$ . Tada je  $x_1 + x_2 = 4x_2 = 4m$ ,  $x_1 \cdot x_2 = 3x_2^2 = m^3$ . Iz prve jednačine dobijamo da je  $x_2 = m$  i uvrštavajući u drugu jednačinu dobijamo  $3m^2 = m^3$ . Kako je  $m \neq 0$  dobijamo da je  $m=3$ .
3.  $2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ , smena  $t = \cos x$ ,  $2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow t_1 = 1$ ,  $t_2 = -\frac{1}{2} \cdot t_1 = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ,  
 $t_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k_2\pi, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ .
4.  $9^x + 3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 2 = 0$ . Uvedenjem smene  $t = 3^x$  i dobije se kvadratna jednačina  $t^2 + t - 2 = 0$  čija su rešenja  $t_1 = -2$  i  $t_2 = 1$ . Rešenje  $t_1 = -2$  odbacujemo, pa ostaje  $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ .
5.  $G = \frac{P \cdot 100}{p} = \frac{1330 \cdot 100}{3,5} = 38000$ .

- Rešiti nejednačinu  $\frac{x^2 + |x-1|}{x-3} \leq x$ . (6 bodova)
- Rešiti jednačinu  $\log_2^2 x = \log_2 x^6 - 8$ ; (4 boda)
  - Rešiti nejednačinu  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-6x} > 9$ . (2 boda)
- Rešiti sistem jednačina  
 $2^{\sin x + \cos y} = 1$   
 $16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4$ . (6 bodova)
- $A(3,2,-1)$ ,  $B(-1,2,2)$  i  $C(7,0,1)$  su redom tri uzastopna temena paralelograma. Odrediti koordinate četvrtog temena  $D$  paralelograma, koordinate tačke  $S$  preseka njegovih dijagonala i dužinu stranice  $AB$ . (6 bodova)
- Biciklista pređe 10% razdaljine od mesta  $A$  do mesta  $B$  za 12 sati krećući se brzinom  $25 \text{ km/h}$ . Za koliko bi vremena biciklista prešao 30% razdaljine od mesta  $A$  do mesta  $B$  ako bi se kretao brzinom  $20 \text{ km/h}$ ? (3 boda)
  - Petru, Aci i Marku je za urađeni posao isplaćeno 24420 dinara. Koliko novca će dobiti svaki od njih ako je Aca radio 11 dana po 6 časova na dan, Petar je radio 8 dana po 9 časova na dan a Marko je radio 21 dan po 4 časa na dan (vrednost rada po času je svakog od njih je ista)? (3 boda)

**REŠENJA:**

- Data nejednačina je definisana za  $x \neq 3$   
 Za  $x \geq 1$  važi  $\frac{x^2 + |x-1|}{x-3} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 1}{x-3} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x-3} \leq 0 \Rightarrow x \in [1,3)$ .  
 Za  $x < 1$  važi  $\frac{x^2 + |x-1|}{x-3} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-3} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ .  
 Dakle, skup rešenja polazne jednačine je skup  $\left[-\frac{1}{2}, 3\right)$ .
- $\log_2^2 x = \log_2 x^6 - 8 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 6 \log_2 x + 8 = 0$ . Uzimajući da je  $\log_2 x = t$  dobija se kvadratna jednačina  $t^2 - 6t + 8 = 0$  sa rešenjima  $t_1 = 2; t_2 = 4$ . Iz  $\log_2 x = 2$  sledi da je  $x = 4$ , a iz  $\log_2 x = 4$  sledi da je  $x = 16$ . Dakle, skup rešenja date jednačine je  $\{4, 16\}$ .
  - $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-6x} > 9 \Leftrightarrow 3^{6x-3} > 3^2 \Leftrightarrow 6x-3 > 2 \Rightarrow x > \frac{5}{6}$ .
- $2^{\sin x + \cos y} = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos y = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos y$   
 $16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4 \Leftrightarrow 2(\sin^2 x + \cos^2 y) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in Z\right\} \vee x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in Z\right\}$   
 $\Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{2} \vee \cos y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y \in \left\{\pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi : l \in Z\right\} \vee y \in \left\{\pm \frac{2\pi}{3} + 2l\pi : l \in Z\right\}$ .

4. Obeležimo sa  $D(x, y, z)$  četvrto teme paralelograma. Iz  $\vec{BA} = \vec{CD}$  sledi  $(-4, 0, 3) = (7 - x, -y, 1 - z)$  odakle je  $-4 = 7 - x$ ;  $0 = -y$ ;  $3 = 1 - z$  odnosno  $x = 11$ ;  $y = 0$ ;  $z = -2$ . Dakle, četvrto teme paralelograma je  $D(11, 0, -2)$ .

Kako je  $\vec{OS} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = (3, 2, -1) + (2, -1, 1) = (5, 1, 0)$ , to je presek dijagonala tačka  $S(5, 1, 0)$ .

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-2)^2 + (-1-2)^2} = 5.$$

5. a) Neka je  $s$  razdaljina između mesta  $A$  i  $B$ . Kako je  $10\%s = 25 \cdot 12 = 300 \text{ km}$  to je  $s = 3000 \text{ km}$ , odakle je  $30\%s = 900 \text{ km}$ . Ako je  $t$  vreme za koje biciklista pređe  $30\%s$  krećući se brzinom  $v = 20 \text{ km/h}$ , nalazi se da je  $t = \frac{s}{v} = \frac{900}{20} = 45 \text{ h}$ .
- b) Kako je Aca radio 66 sati, Petar 72 sata a Marko 84 sati to je ukupan broj utrošenih sati 222. Vrednost jednog sata je  $\frac{24420}{222} = 110$  dinara. Dakle, Aca je dobio  $66 \cdot 110 = 7260$  dinara, Petar je dobio  $72 \cdot 110 = 7920$  dinara a Marko  $84 \cdot 110 = 9240$  dinara.

## MATEMATIKA

jul 2004. godine

1. Rešiti nejednačinu  $\frac{|x+3|+x}{x+2} \geq 1$ . (6 bodova)
2. a) Rešiti jednačinu  $\log_2 x + 2 \log_x 2 = 3$ ;  
 b) Rešiti nejednačinu  $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$ . (3 boda)
3. Rešiti jednačinu  $2 + \sin^2 x = \cos^2 x + 3 \sin x$ . (3 boda)
4. Zbir prva tri binomna koeficijenta u razvoju binoma  $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} + y\right)^n$  je 46. Odrediti član koji ne sadrži  $y$ . (6 bodova)
5. a) U jednoj prodavnici artiklu od 12250 dinara cena je snižena za 40%. U drugoj prodavnici istom artiklu (sa istom cenom) cena je prvo snižena za 36%, a zatim je nova cena snižena za 4%. Za koliko se razlikuju cene artikla u ovim prodavnicama? (4 boda)
- b) Za 14 kilograma kajsija plaćeno je 980 dinara. Koliko kilograma kajsija se može kupiti za 4340 dinara? (2 boda)

## REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za  $x \neq -2$ .

$$\text{Za } x \geq -3 \text{ važi } \frac{|x+3|+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+3+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, -2) \cup [-1, \infty);$$

$$\text{Za } x < -3 \text{ važi } \frac{|x+3|+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-x-3+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3}{x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x+5}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, -3);$$

Dakle, skup rešenja polazne jednačine je skup  $[-5, -2) \cup [-1, \infty)$ .

2. a) Data jednačina je definisana za  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$\log_2 x + 2 \log_x 2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + 2 \frac{1}{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 = 0. \quad \text{Uzimajući da}$$

je  $\log_2 x = t$  dobija se kvadratna jednačina  $t^2 - 3t + 2 = 0$

sa rešenjima  $t_1 = 2; t_2 = 1$ . Iz  $\log_2 x = 2$  sledi da je  $x = 4$ , a iz  $\log_2 x = 1$  sledi da je  $x = 2$ .

Dakle, skup rešenja date jednačine je  $\{1, 2\}$ .

$$\text{b) } \frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64 \Leftrightarrow \frac{2^{2x-1} \cdot 2^{2x+2}}{2^{3x-3}} = 2^6 \Leftrightarrow x + 4 = 6 \Leftrightarrow x = 2.$$

3.  $2 + \sin^2 x = \cos^2 x + 3 \sin x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ . Uzimajući da je  $\sin x = t$  dobija se

kvadratna jednačina  $2t^2 - 3t + 1 = 0$  sa rešenjima  $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$ . Iz  $\sin x = 1$  sledi da je

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z, \text{ a iz } \sin x = \frac{1}{2} \text{ sledi da } x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z \right\}.$$

Dakle, skup rešenja date jednačine je

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z \right\}.$$

4. Iz uslova da je zbir prva tri binomna koeficijenta 46 sledi da je

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 46 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46 \Rightarrow n = 9. \text{ Kako je}$$

$$\left( \frac{x}{\sqrt{y}} + y \right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left( \frac{x}{\sqrt{y}} \right)^k y^{9-k} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^k y^{9-\frac{3k}{2}} \text{ to član koji ne sadrži } y \text{ dobija se iz uslova}$$

$$\text{da je } 9 - \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 6. \text{ Dakle, član koji ne sadrži } y \text{ je } \binom{9}{6} x^6 = 84x^6.$$

5. a) Ako sa  $x$  označimo novu cenu u prvoj prodavnici to je  $x = 0,6 \cdot 12250 = 7350$  dinara. Ako sa  $y$  označimo novu cenu u drugoj prodavnici to je  $y = 0,64 \cdot 0,96 \cdot 12250 = 7562,40$  dinara. Nove cene u ove dve prodavnice se razlikuju za  $7562,40 - 7350 = 176,40$  dinara.

b) Ako sa  $x$  označimo količinu kajsija (u kilogramima) koja se može kupiti za 4340 dinara, to se iz proporcije  $14 : 980 = x : 4340$  dobija da je  $x = 62$  kilograma.

1. Rešiti nejednačinu

$$\frac{x^2 + x - 12}{|x| + 2} \geq 0. \quad (6 \text{ bodova})$$

2. a) Rešiti jednačinu  $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$ ,  $x > 0 \wedge x \neq 1$ . (3 boda)

b) Rešiti nejednačinu  $2^{\frac{x+1}{x-1}} < 8$ . (3 boda)

3. Rešiti jednačinu  $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ . (6 bodova)

4. Data su tačke  $A(2, -3, 4)$ ,  $B(1, 2, -1)$  i  $S(2, 0, 0)$

a) Izračunati dužinu duži AB. (2 boda)

b) Odrediti tačke C i D tako da su tačke A, B, C i D temena paralelograma čiji je prosek dijagonala S. (4 boda)

5. a) Košulja je koštala 1500 dinara, a zatim je poskupila za 25 %. Za koliko procenata bi trebalo sniziti novu cenu košulje da bi ona opet iznosila 1500 dinara? (3 boda)

b) Ako 8 radnika mogu da završe jedan posao za 5 dana radeći po 6 sati dnevno, koliko je radnika potrebno angažovati da bi se isti posao uradio za 4 dana radeći po 5 sati dnevno? (4 boda)

**REŠENJA:**

1. 
$$\frac{x^2 + x - 12}{|x| + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+4)}{|x| + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \left( x < 0 \wedge \frac{(x-3) \cdot (x+4)}{-x+2} \geq 0 \right) \vee \left( x \geq 0 \wedge \frac{(x-3)(x+4)}{x+2} \geq 0 \right)$$

$x \in$	$(-1, -4)$	$\{-4\}$	$(-4, 0)$	$x \in$	$[0, 3)$	$\{3\}$	$(3, -\infty)$
$x - 3$	-	-	-	$x - 3$	-	0	+
$x + 4$	-	0	+	$x + 4$	+	+	+
$-x + 2$	+	+	+	$x + 2$	+	+	+
$\frac{(x-3)(x+4)}{x+2}$	+	0	-	$\frac{(x-3)(x+4)}{x+2}$	-	0	+

Prema tome  $\frac{x^2 + x - 12}{|x| + 2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [3, \infty)$ .

2. a)

$$\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \vee \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 9$$

b)  $2^{\frac{x+1}{x-1}} < 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{x+1}{x-1}} < 2^3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 3 \Leftrightarrow \frac{4-2x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ .

3.  $\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$
4. a)  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{51}.$
- b)
- $$\overrightarrow{r_c} = 2\overrightarrow{r_s} - \overrightarrow{r_A} = (4, 0, 0) - (2, -3, 4) = (2, 3, -4)$$
- $$\overrightarrow{r_D} = 2\overrightarrow{r_s} - \overrightarrow{r_B} = (4, 0, 0) - (1, 2, -1) = (3, -2, 1).$$
5. a) Kako je  $1.25 \cdot 1500 \cdot x = 1500$  odnosno  $x = \frac{1}{1.25} = 0.80$ . Sledi da bi košulja trebalo da pojeftini za 20%
- b) Osam radnika završi posao za 30 sati. Isti posao uradi  $x$  radnika za 20 sati. Iz obrnute proporcije sledi  $8:x=20:30$ , odnosno  $x = \frac{8 \cdot 30}{20} = 12$  radnika.

## MATEMATIKA

jul 2006. godina

1. Odrediti oblast definisanosti funkcije:  
 $f(x) = \sqrt{\frac{|x|+3+x}{x+2}} - 1.$  (6 bodova)
2. a) Rešiti jednačinu  $\log_2(x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\sqrt[3]{2}}(x-1) = 2, x > 1$  (4 boda)
- b) Rešiti nejednačinu:  $3^x > 2^{x-1} + 2^x$  (2 boda)
3. Rešiti jednačinu:  $2 \operatorname{tg} x \sin^2 x = \operatorname{tg} x$  (6 bodova)
4. U razvijenom obliku stepena binoma  
 $\left(4x - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^n, \quad x > 0, \quad x \in R,$
- Binomni koeficijent trećeg člana je 105. Odredi koeficijent uz  $x^{-3}$ . (4 boda)
5. a) Benzin je poskuepo za 1,6%, tj. za 1,3 dinara po litru. Kolika je nova cena benzina? (3 boda)
- b) Sa postojećim brojem mašina posao može da završi za 3 dana. Sa 3 mašine više posao bi se završio za 2 dana. Pod pretpostavkom da su sve mašine iste, koliko bi dana bilo potrebno jednoj mašini da završi taj posao? (3 boda)

## REŠENJA:

1. Oblast definisanosti funkcije odredićemo rešavanjem nejednačine  $\frac{|x|+3+x}{x+2}-1 \geq 0$ . Za  $x \neq -2$

$$\frac{|x|+3+x}{x+2}-1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x|+1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x+2 > 0$$

jer je  $|x|+1 > 0$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ . Oblast definisanosti funkcije je  $D(f) = (-2, +\infty)$ .

2. a)

$$\log_2(x^2-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\sqrt{2}}(x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) - \log_2(x+1) - \log_2(x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 \frac{(x^2-1)}{(x+1)(x-1)^3} = \log_2 4 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 4 \Leftrightarrow x-1 = \pm \frac{1}{2} \quad \text{Kako } x = \frac{3}{2} \in (1, +\infty), \text{ dok } x = \frac{1}{2} \notin (1, +\infty),$$

to je  $x = \frac{3}{2}$ , jedinstveno rešenje polazne jednačine.

b)  $3^x > 2^{2-1} + 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x > \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > 1$

3.  $2\operatorname{tg}x \sin^2 x = \operatorname{tg}x \Leftrightarrow \operatorname{tg}x(2\sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{tg}x = 0 \vee \cos 2x = 0) \Leftrightarrow$   
 $x = k_1\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k_2 \frac{\pi}{2} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$

4.  $\binom{n}{2} = 105 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 105 \Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0 \Leftrightarrow (n^2 - n - 210 = 0 \Leftrightarrow (n = 15 \vee n = -14))$

Kako je  $n \in \mathbb{N}$  to je traženi eksponent  $n = 15$ .  $k+1$ -vi član u razvoju stepena binoma je:

$$\binom{15}{k} (4x)^{15-k} (-1)^k (2x)^{\frac{k}{2}} = \binom{15}{k} (-1)^k 4^{15-k} 2^{\frac{k}{2}} x^{15-k-\frac{k}{2}}$$

Izjednačavanjem  $x^{15-k-\frac{k}{2}} = x^{-3}$ , dobijamo  $k=12$ , odnosno traženi koeficijent je

$$\frac{15!}{12!3!} 4^3 2^{-6} = 455. \quad (\text{Isti rezultat dobijamo ako posmatramo } x^{15-k-\frac{k}{2}} = x^{-3}, \text{ kada je } k=3)$$

5. a) Neka je stara cena benzina  $x$ . Kako je 1,6% stare cene iznosi 1,3 dinara po litru, to je  
 $x = \frac{1.3 \cdot 100}{1.6} = 81.2$  dinara. Posle poskupljenja, nova cena litra benzina je 82,8.

- b) Neka je na početku bilo  $x$  mašina. Za jedan dan ovih  $x$  mašina uradi  $\frac{1}{3}$  posla. Međutim,  
 $x+3$  mašine za jedan dan završe  $\frac{1}{2}$  posla. Dakle, dodatne 3 mašine za jedan dan obave

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ posla. Odavde sledi da će jedna mašina posao završiti za 18 dana.}$$

1. Odrediti oblast definisanosti (domen) funkcije:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}}. \quad (6 \text{ bodova})$$

2. U funkciji  $f(x) = ax^2 + bx - 7$  odrediti nepoznate koeficijente  $a$  i  $b$ , ako je  $f(1) = -9$  i  $f(-2) = 15$ .

(6 bodova)

3. Rešiti jednačine:

a)  $9 \cdot 2^x = 3^{x+1} + 3^x$ .

b)  $\log_3 |x-1|$ ,  $x \neq 1$ .

(6 bodova)

4. Rešiti trigonometrijsku jednačinu  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ .

(6 bodova)

5. a) U dve prodavnice cena košulje je 12250 dinara. U prvoj prodavnici cena je snižena za 40%, a u drugoj prodavnici sena je prvo snižena za 36%, a zatim za još 4%. Za koliko se razlikuju cene košulja u ovim prodavnicama nakon svih pojeftinjenja?

b) Odrediti broj čiji je 12% jednako 4,2% broja  $\frac{3+4,2:0,1}{(1:0,3-\frac{7}{3}) \cdot 0,125}$ .

(6 bodova)

**REŠENJA:**

1. Funkcija je definisana za  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} \geq 0$  i  $x \neq -1$ . Iz  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$  dobija se

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x+1} \geq 0, \text{ tako da je oblast definisanosti } D = (-1, 2] \cup [3, \infty).$$

2. Iz  $f(1) = a + b - 7$  i  $f(-2) = 4a - 2b - 7 = 15$  dobija se sistem linearnih jednačina  $a + b = -2 \wedge 4a - 2b = 22$ , čije je rešenje  $(a, b) = (3, -5)$ .

3.a  $9 \cdot 2^x = 3^{x+1} + 3^x \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x = 3^x(3+1) \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2$ .

3.b  $\log_3 |x-1| = 1 \Leftrightarrow \log_3 |x-1| = \log_3 3 \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow x-1 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$ .

4.  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$   
 Uvođenjem smene  $t = \cos x$  dobija se kvadratna jednačina  $2t^2 - 3t - 2 = 0$  čija su rešenja  $t = 2$  i  $t = -\frac{1}{2}$ . Kako je  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , jednačina  $\cos x = 2$  nema rešenja, pa se iz  $\cos x = -\frac{1}{2}$  dobija  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$ .

5.a Označimo sa  $C_1$  cenu košulje u prvoj prodavnici nakon pojeftinjenja, i sa  $C_2$  cenu košulje u drugoj prodavnici nakon oba pojeftinjenja. Iz uslova zadatka sledi

$$C_1 = 0,6 \cdot 12250 = 7350 \text{ i } C_2 = 0,96 \cdot 0,64 \cdot 12250 = 0,96 \cdot 7840 = 7526,4.$$

Razlika u ceni košulja je  $C_2 - C_1 = 7526,4 - 7350 = 176,4$  dinara (tj. u drugoj prodavnici košulja je skuplja za 176,4 dinara).

5.b Označimo sa  $x$  traženi broj. Na osnovu uslova zadatka dobija se

$$0,12x = 0,42 \frac{3 + 4,2 : 0,1}{(1 : 0,3 - \frac{7}{3}) \cdot 0,125} \Leftrightarrow 0,12x = 0,042 \cdot 360 \Leftrightarrow 0,12x = 15,12 \Leftrightarrow x = \frac{15,12}{0,12} = 126.$$

1. Data je jednačina  $(2 - m)x^2 - 2mx - 2m - 2 = 0$ ,  $m \neq 2$ .
  - a) Odrediti  $m$  tako da rešenja date jednačine budu realna i različita.
  - b) Koristeći Vijetove formule izraziti  $x_1 + x_2$  i  $x_1 \cdot x_2$ , gde su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja date jednačine.
  
2. a) Rešiti jednačinu
 
$$16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0.$$
  
 b) Rešiti nejednačinu
 
$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x < 7.$$
  
3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu
 
$$\sin x + \cos 2x = 1.$$
  
4. a) Dat je binom  $(a + b)^n$ . Odrediti  $n$  tako da zbir prva tri binomna koeficijenta bude 46.
   
 b) U razvoju binoma  $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$  naći član koji ne sadrži  $x$ .
  
5. a) Sedam radnika mogu da utovare jabuke za 15 dana. Sedam radnika je radilo 5 dana, a onda su im se priključila još tri radnika. Za koliko dana su radnici utovarili jabuke?
   
 b) Zarada je ostvarena prodajom 3600 kilograma jabuka po ceni od 80 dinara po kilogramu. Za koliko procenata bi se smanjila zarada ako bi se količina jabuka smanjila za 30%, a cena jabuka smanjila za 20%?

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

**REŠENJA:**

1. Data je jednačina  $(2 - m)x^2 - 2mx - 2m - 2 = 0$ ,  $m \neq 2$ .
  - a) Odrediti  $m$  tako da rešenja date jednačine budu realna i različita.
 

Data kvadratna jednačina ima realna i različita rešenja za  $(-2m)^2 - 4 \cdot (2 - m) \cdot (-2m - 2) > 0$ , tj. za  $-m^2 + 2m + 4 > 0$ . Skup rešenja je  $m \in (1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ . Kako je  $m \neq 2$  polazna jednačina ima realna i različita rešenja za  $m \in (1 - \sqrt{5}, 2) \cup (2, 1 + \sqrt{5})$ .
  - b) Koristeći Vijetove formule izraziti  $x_1 + x_2$  i  $x_1 \cdot x_2$ , gde su  $x_1$  i  $x_2$  rešenja date jednačine.
 
$$x_1 + x_2 = \frac{2m}{2-m}, x_1 x_2 = \frac{-2(m+1)}{2-m}.$$
  
2. a) Rešiti jednačinu  $16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$ .
 
$$16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 6 \cdot 4^x + 8 = 0.$$
 Uvodjenjem smene  $t = 4^x$ , dobija se kvadratna jednačina  $t^2 - 6t + 8 = 0$  čija su rešenja  $t_1 = 4$  i  $t_2 = 2$ .  $4^x = 4 \Rightarrow x = 1$ , a  $4^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ , tako da je skup rešenja  $x \in \{1, \frac{1}{2}\}$ .
   
 b) Rešiti nejednačinu  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x < 7$ .
 Za  $x > 0$  važi  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \frac{7}{4} \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \log_2 x < 4 \cdot \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 16 \Rightarrow x < 16$ , tako da je rešenje polazne nejednačine  $x \in (0, 16)$ .
  
3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu  $\sin x + \cos 2x = 1$ .
 
$$\sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \sin x - 1) = 0.$$
 Iz uslova  $\sin x = 0$  dobija se  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , a iz uslova  $\sin x = \frac{1}{2}$  dobija se  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  i  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Skup rešenja jednačine je  $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ .

4.

a) **Dat je binom  $(a + b)^n$ . Odrediti  $n$  tako da zbir prva tri binomna koeficijenta bude 46.**

Iz uslova  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 46$  dobija se  $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46$ , odnosno kvadratna jednačina  $n^2 + n - 90 = 0$  čija su rešenja  $n_1 = 9$  i  $n_2 = -10$ . Kako  $n \in \mathbb{N}$  traženo rešenje je  $n = 9$ .

b) **U razvoju binoma  $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$  naći član koji ne sadrži  $x$ .**

$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^k (x^{-2})^{9-k} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^{3k-18}$ . Iz uslova da član ne sadrži  $x$  dobija se  $3k - 18 = 0 \Rightarrow k = 6$ , tako da je traženi član  $\binom{9}{6} = 84$ .

5.

a) **Sedam radnika mogu da utovare jabuke za 15 dana. Sedam radnika je radilo 5 dana, a onda su im se priključila još tri radnika. Za koliko dana su radnici utovarili jabuke?**

Neka je  $x$  broj dana koji je potreban za utovar jabuka nakon pet dana (kada su se priključila još tri radnika). Iz  $7 : 10 = x : 10$  dobija se  $10x = 70$  odakle je  $x = 7$ . Radnici će utovariti jabuke za  $5 + x = 5 + 7 = 12$  dana.

b) **Zarada je ostvarena prodajom 3600 kilograma jabuka po ceni od 80 dinara po kilogramu. Za koliko procenata bi se smanjila zarada ako bi se količina jabuka smanjila za 30%, a cena jabuka smanjila za 20%?**

Označimo sa  $x$  početnu količinu jabuka, a sa  $y$  početnu cenu. Početna zarada je  $z = xy$ .

Količina jabuka se smanjuje za 30%, tako da je nova količina  $x' = 0.7x$ , a cena se smanjuje za 20%, tako da je nova cena  $y' = 0.8y$ .

Nova zarada je  $z' = x'y' = 0.7x \cdot 0.8y = 0.56xy = 0.56z$ , tako da bi se zarada smanjila za 44%.

1. Rešiti nejednačinu  $\frac{1}{x-2} \geq \frac{4}{x+3}$ .
2. a) Rešiti eksponencijalnu jednačinu  $9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ .  
b) Rešiti logaritamsku nejednačinu  $\log_3(x-2) \leq 4$ .
3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu  $\sqrt{2} \operatorname{ctg} x = 2 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$ .
4. a) Odrediti tačku  $S$  koja je sredina duži  $BC$ .  
b) Izračunati intenzitet vektora  $\overrightarrow{BC}$ , tj. dužinu duži  $BC$ .  
c) Izračunati koordinate tačke  $D(x, y)$  tako da četvorougao  $ABCD$  bude paralelogram.
5. a) Sa popustom od 20% knjiga košta 2628 dinara. Za koliko je dinara snižena cena knjige?  
b) Tri radnika dele zaradu od 30.000 dinara srazmerno uloženom radu. Koliko dinara dobija svaki od njih ako je radnik A radio 8 sati, radnik B radio 12 sati, a radnik C radio 20 sati?

**Svaki zadatak nosi 6 bodova.**

### REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za  $x \in \mathcal{R} \setminus \{-3, 2\}$ . Tada je:  $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11-3x}{(x-2)(x+3)} \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, \frac{11}{3}]$ .
2. a)  $9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ . Uvodjenjem smene  $t = 3^x$ , dobija se kvadratna jednačina  $t^2 + 6t - 27 = 0$  čija su rešenja  $t_1 = -9$  i  $t_2 = 3$ . Jednačina  $3^x = -9$  nema rešenja, a rešnje jednačine  $3^x = 3$  je  $x = 1$ .  
b) Data nejednačina je definisana za  $x - 2 > 0$ , tj.  $x > 2$ . Kako je osnova logaritma  $a = 3 > 0$ , važi  $\log_3(x-2) \leq 4 \Leftrightarrow x-2 \leq 3^4 \Leftrightarrow x \leq 83$ , pa je rešenje  $x \in (2, 83]$ .
3.  $\sqrt{2} \operatorname{ctg} x = 2 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x \Leftrightarrow \sqrt{2} \operatorname{ctg} x - 2 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x(\sqrt{2} - 2 \sin x) = 0$ . Za  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathcal{Z}$  je  $\operatorname{ctg} x = 0$ , a za  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathcal{Z}$  je  $\sqrt{2} - 2 \sin x = 0$ , tj.  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
4. a) Sredina duži  $BC$  je  $S\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+5}{2}\right)$ , tj.  $S(1, \frac{5}{2})$ .  
b) Vektor  $\overrightarrow{BC} = (3, 5) - (-1, 0) = (4, 5)$ , a njegov intenzitet, tj. dužina duži  $BC$  je  $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ .  
c) Kako je  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , to je  $(-2, -2) = (3-x, 5-y)$ . Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata dobijamo  $3-x = -2$  i  $5-y = -2$ , tj.  $x = 5$  i  $y = 7$ .
5. a) Bez popusta knjiga košta  $2628 : 0.8 = 3285$  dinara. Cena knjige je snižena za  $3285 - 2628 = 657$  dinara.  
b) Ukupno radno vreme je  $8+12+20=40$  sati. Cena jednog radnog sata je  $30.000 : 40 = 750$  dinara. Radnik A dobija  $8 \cdot 750 = 6.000$  dinara, B dobija  $12 \cdot 750 = 9.000$  dinara, a C dobija  $20 \cdot 750 = 15.000$  dinara.