

Prijemni ispit iz

M A T E M A T I K E

*Mašinstvo, Industrijsko inženjerstvo i menadžment, Grafičko inženjerstvo i dizajn,
Inženjerstvo zaštite životne sredine*

02. 07. 2008.

1. Data je jednačina $(2 - m)x^2 - 2mx - 2m - 2 = 0$, $m \neq 2$.

a) Odrediti m tako da rešenja date jednačine budu realna i različita.

b) Koristeći Vijetove formule izraziti $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$, gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

2. a) Rešiti jednačinu

$$16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0.$$

b) Rešiti nejednačinu

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x < 7.$$

3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\sin x + \cos 2x = 1.$$

4. a) Dat je binom $(a + b)^n$. Odrediti n tako da zbir prva tri binomna koeficijenta bude 46.

b) U razvoju binoma $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$ naći član koji ne sadrži x .

5. a) Sedam radnika mogu da utovare jabuke za 15 dana. Sedam radnika je radilo 5 dana, a onda su im se priključila još tri radnika. Za koliko dana su radnici utovarili jabuke?

b) Zarada je ostvarena prodajom 3600 kilograma jabuka po ceni od 80 dinara po kilogramu. Za koliko procenata bi se smanjila zarada ako bi se količina jabuka smanjila za 30%, a cena jabuka smanjila za 20%?

Katedra za matematiku

Svaki zadatak donosi po 6 poena.

Izrada zadataka traje 120 minuta.

M A T E M A T I K E

02. 07. 2008.

1. **Data je jednačina** $(2 - m)x^2 - 2mx - 2m - 2 = 0$, $m \neq 2$.

a) **Odrediti m tako da rešenja date jednačine budu realna i različita.**

Data kvadratna jednačina ima realna i različita rešenja za $(-2m)^2 - 4 \cdot (2 - m) \cdot (-2m - 2) > 0$, tj. za $-m^2 + 2m + 4 > 0$. Skup rešenja je $m \in (1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$. Kako je $m \neq 2$ polazna jednačina ima realna i različita rešenja za $m \in (1 - \sqrt{5}, 2) \cup (2, 1 + \sqrt{5})$.

b) **Koristeći Vijetove formule izraziti $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$, gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.**

$$x_1 + x_2 = \frac{2m}{2-m}, x_1 x_2 = \frac{-2(m+1)}{2-m}.$$

2. a) **Rešiti jednačinu** $16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$.

$16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$. Uvodjenjem smene $t = 4^x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 6t + 8 = 0$ čija su rešenja $t_1 = 4$ i $t_2 = 2$. $4^x = 4 \Rightarrow x = 1$, a $4^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, tako da je skup rešenja $x \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

b) **Rešiti nejednačinu** $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x < 7$.

Za $x > 0$ važi $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \frac{7}{4} \log_2 x < 7 \Leftrightarrow \log_2 x < 4 \cdot \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 16 \Rightarrow x < 16$, tako da je rešenje polazne nejednačine $x \in (0, 16)$.

3. **Rešiti trigonometrijsku jednačinu** $\sin x + \cos 2x = 1$.

$\sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2 \sin x - 1) = 0$. Iz uslova $\sin x = 0$ dobija se $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a iz uslova $\sin x = \frac{1}{2}$ dobija se $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Skup rešenja jednačine je $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

4. a) **Dat je binom** $(a + b)^n$. **Odrediti n tako da zbir prva tri binomna koeficijenta bude 46.**

Iz uslova $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 46$ dobija se $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46$, odnosno kvadratna jednačina $n^2 + n - 90 = 0$ čija su rešenja $n_1 = 9$ i $n_2 = -10$. Kako $n \in \mathbb{N}$ traženo rešenje je $n = 9$.

b) **U razvoju binoma** $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$ **naći član koji ne sadrži x .**

$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^k (x^{-2})^{9-k} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^{3k-18}$. Iz uslova da član ne sadrži x dobija se $3k - 18 = 0 \Rightarrow k = 6$, tako da je traženi član $\binom{9}{6} = 84$.

5. a) **Sedam radnika mogu da utovare jabuke za 15 dana. Sedam radnika je radilo 5 dana, a onda su im se priključila još tri radnika. Za koliko dana su radnici utovarili jabuke?**

Neka je x broj dana koji je potreban za utovar jabuka nakon pet dana (kada su se priključila još tri radnika). Iz $7 : 10 = x : 10$ dobija se $10x = 70$ odakle je $x = 7$. Radnici će utovariti jabuke za $5 + x = 5 + 7 = 12$ dana.

b) **Zarada je ostvarena prodajom 3600 kilograma jabuka po ceni od 80 dinara po kilogramu. Za koliko procenata bi se smanjila zarada ako bi se količina jabuka smanjila za 30%, a cena jabuka smanjila za 20%?**

Označimo sa x početnu količinu jabuka, a sa y početnu cenu. Početna zarada je $z = xy$.

Količina jabuka se smanjuje za 30%, tako da je nova količina $x' = 0.7x$, a cena se smanjuje za 20%, tako da je nova cena $y' = 0.8y$.

Nova zarada je $z' = x'y' = 0.7x \cdot 0.8y = 0.56xy = 0.56z$, tako da bi se zarada smanjila za 44%.