Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE
Saobraćaj, Građevinarstvo i Geodezija i geomatika
26.06.2009.

1. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine $(x+1):(5-x)=(x+m):(x-1)$. Odrediti m tako da važi $x_1^2+x_2^2<26$.

Očigledno, za rešenja jednačine mora da važi $x \neq 5$ i $x \neq 1$. Kad se data jednačina pomnoži izrazom $(5-x)(x-1)$ i sredi, dobije se kvadratna jednačina

$$2x^2+(m-5)x-1-5m=0\,. \tag{1}$$

Notacija kvadratnog trinoma ax^2+bx+c daje $a=2$, $b=m-5$, $c=-1-5m$.
Koristeći Vietove formule imamo

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=\left(-\frac{m-5}{2}\right)^2-2\frac{-1-5m}{2}<26\,.$$

Poslednja nejednakost je ekvivalentna

$$m^2+10m-75<0\,.$$

Rešavajući ovu kvadratnu nejednačinu po m dobijamo

$$m_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100+4\cdot 75}}{2}, m_1=-15, m_2=5, \text{ pa } m\in(-15,5)\,.$$

Nedozvoljeno rešenje $x=1$ u kvadratnoj jednačini (1) daje $-4-4m=0$, odnosno $m=-1$, a $x=5$ nije rešenje jednačine (1) ni za jednu vrednost parametra m. Isključivanjem vrednosti $m=-1$ iz dobijenog intervala za m dobijamo konačno rešenje

$$m\in(-15,-1)\cup(-1,5)\,.$$

2. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{2x^2-14}{x^2+x-12}$.
   (a) Rešiti nejednačinu $f(x)\geq 1$.
   (b) Izračunati $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(a) $$f(x)\geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2-14}{x^2+x-12}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+4)}\geq 0$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Odgovor čitamo iz tabele: $x\in(-\infty,-4)\cup[-1,2]\cup(3,+\infty)$.

(b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-14}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^{-2}}{x^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{14}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}=\frac{2-0}{1+0-0}=2\,.$$

3. Rešiti jednačinu $5^{x-1} - 5^{2-x} = 4.$

Uvodimo smenu $5^{x-1} = t$. Dobijamo

$$t - \frac{5}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 5\,.$$

Negativno rešenje, zbog $5^{x-1} > 0$, odbacujemo, vraćamo smenu i dobijamo

$$t = 5^{x-1} = 5^1 \ \Leftrightarrow\ x - 1 = 1 \ \Leftrightarrow\ x = 2\,.$$

4. Rešiti nejednačinu $2\log_2 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{2}}(4x^2) > 2.$

Data nejednačina je definisana za $x > 0$ i ekvivalentna nejednačini

$$\log_2 x - \log_2 4 - 2\log_2 x > 2 \ \Leftrightarrow\ -\log_2 x > 4 \ \Leftrightarrow\ \log_2 x < -4\,.$$

$$\text{Odatle zaključujemo } x \in (0, 2^{-4}) = \left(0, \frac{1}{16}\right).$$

5. Rešiti jednačinu $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\cos x = 5.$

Primenom osnovnih algebarskih operacija i Pitagorine teoreme: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dobijamo:

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\cos x - 5 = 0 \ \Leftrightarrow\ 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x + 3 = 0.$$

Smena $\cos x = t$ daje

$$2t^2 + 2\sqrt{2}t + 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ t_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-24}}{2}\,.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednačine je negativna: $8 - 24 = -16$ pa data jednačina nema rešenja u skupu realnih brojeva.

6. Koliko članova rastuće aritmetičke progresije treba sabrati da bi se dobio zbir 3, ako je $a_1 + a_6 = 1$ i $a_3^2 = 4$?

Prvo ćemo iz datih jednakosti naći prvi član niza a_1 i razliku d.

$$a_1 + a_1 + 5d = 1 \wedge (a_1 + 2d)^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ a_1 = \frac{1-5d}{2} \wedge \left(\frac{1-5d}{2} + 2d\right)^2 = (\pm 2)^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{1-5d+4d}{2} = 2 \vee \frac{1-5d+4d}{2} = -2 \ \Leftrightarrow\ d = -3 \vee d = 5\,.$$

Odbacujemo vrednost $d = -3$ jer daje opadajući niz. Dobijamo $a_1 = \frac{1-5\cdot 5}{2} = -12$. Suma n sabiraka aritmetičkog niza je $S_n = (a_1 + a_1 + (n-1)d)\frac{n}{2}$. Rešavamo jednačinu $S_n = 3$.

$$(-12 - 12 + (n-1)\cdot 5)\frac{n}{2} = 3 \ \Leftrightarrow\ 5n^2 - 29n - 6 = 0 \ \Rightarrow\ n = 6\,.$$

(Rešenje poslednje kvadratne jednačine $n = -\frac{1}{5}$ odbacujemo jer nije ceo broj.)

7. Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

Dokazaćemo shemom matematičke indukcije po n.

$n=1 \qquad \frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3+1}.$

$n \to n+1$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}}^{(*)}+\frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)}=$$

$(*)$ - Koristimo indukcijsku pretpostavku:

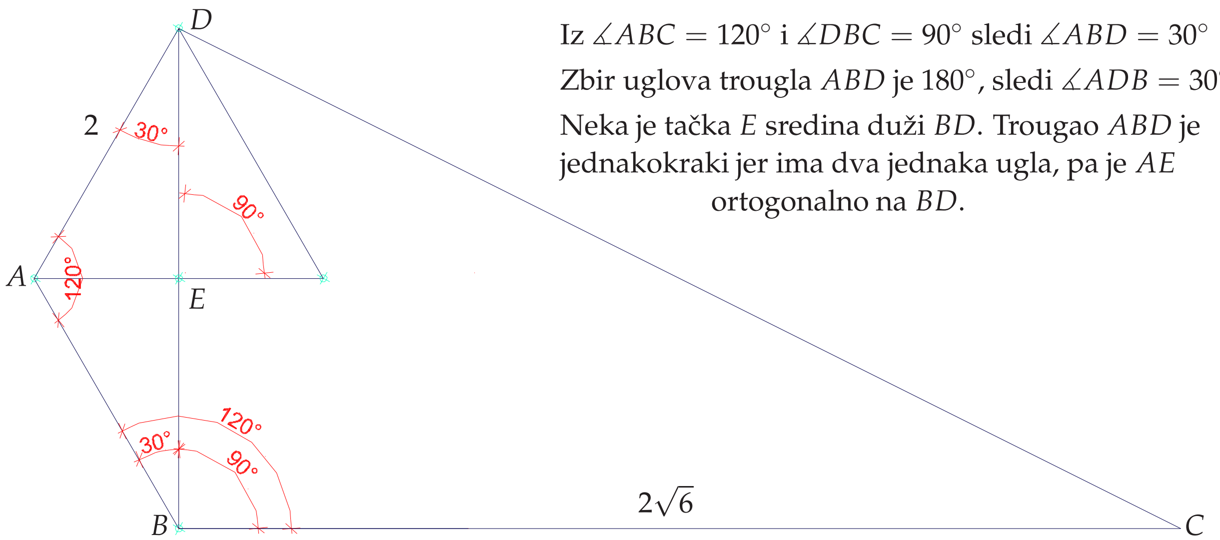
$$=\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)}=$$

$$=\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n^2+n+3n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n(3n+1)+3n+1}{(3n+1)(3n+4)}=$$

$$=\frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}=\frac{n+1}{3(n+1)+1}.$$

Time je dokaz shemom matematičke indukcije završen.

8. U četvorouglu $ABCD$ stranica $AD=2$ i stranica $BC=2\sqrt{6}$. Dijagonala BD je normalna na stranicu BC. Odrediti stranicu CD ako se zna da je $\measuredangle ABC=\measuredangle BAD=120^\circ$.



Iz $\measuredangle ABC=120^\circ$ i $\measuredangle DBC=90^\circ$ sledi $\measuredangle ABD=30^\circ$
Zbir uglova trougla ABD je 180°, sledi $\measuredangle ADB=30^\circ$.
Neka je tačka E sredina duži BD. Trougao ABD je jednakokraki jer ima dva jednaka ugla, pa je AE ortogonalno na BD.

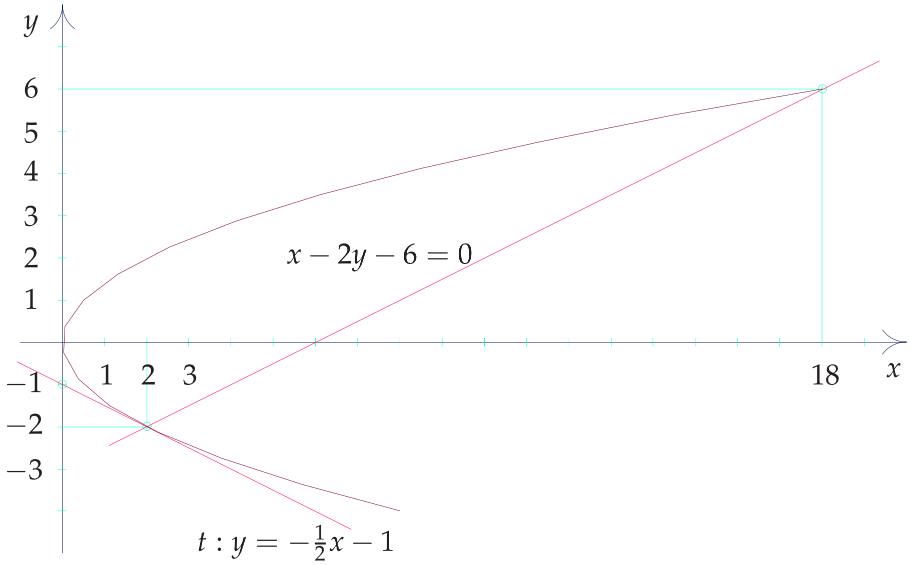
Vidi se da je trougao AED polovina jednakostraničnog trougla, pa je $ED=AD\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.
Onda je $BD=2ED=2\sqrt{3}$.
Iz pravouglog trougla DBC dobijamo $CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{4\cdot 3+4\cdot 6}=6$.

9. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2=2x$ u onoj tački preseka parabole sa pravom $x-2y-6=0$ koja se nalazi u IV kvadrantu.

Apscise presečnih tačaka dobijamo smenjivanjem ordinate $y=\frac{1}{2}x-3$ iz jednačine prave u jednačinu parabole:

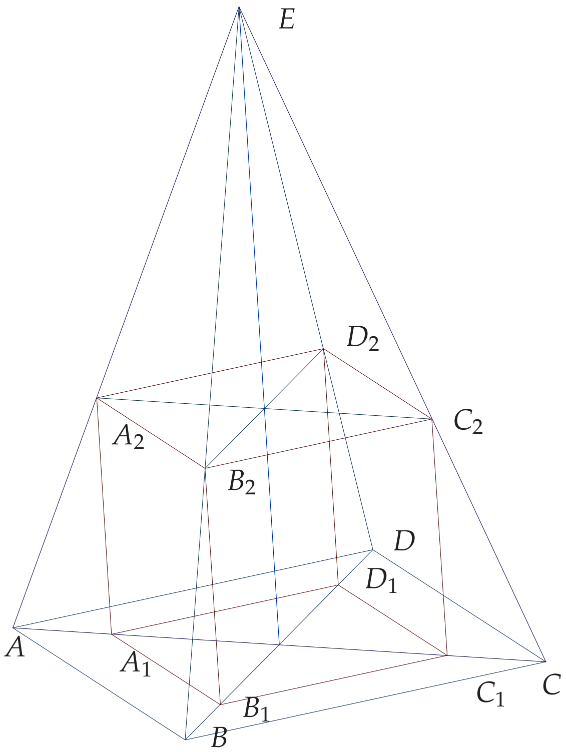
$$\frac{1}{4}x^2-3x+9=2x \;\Leftrightarrow\; x^2-20x+36=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=2 \vee x_2=18\,.$$

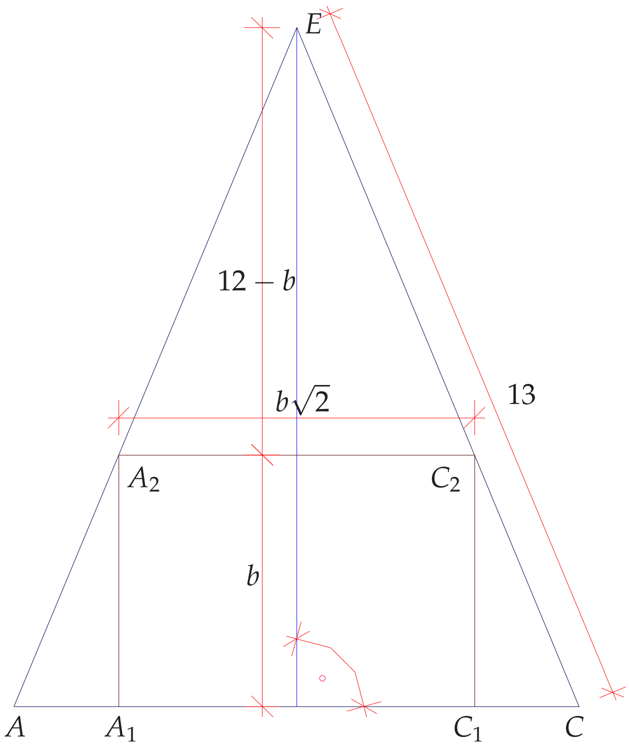
Ordinate dobijamo iz jednačine prave. Presečne tačke su $A(2,-2)$ i $B(18,6)$, tačka A je u IV kvadrantu.



U tački A jednačina parabole je $y = -\sqrt{2x}$, prvi izvod je $y' = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$, koeficijent pravca tražene tangente je $k = y'(x_1) = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = -\frac{1}{2}$. Jednačina tangente je $t : y - (-2) = -\dfrac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - 1$.

10. Data je prava pravilna četvorostrana piramida kod koje je ivica osnove $a = 5\sqrt{2}$ i bočna ivica $s = 13$. Izračunati ivicu kocke koja je upisana u piramidu tako da se gornja temena kocke nalaze na bočnim ivicama piramide.





Neka su temena osnove piramide A, B, C i D, neka je vrh E. Neka su temena upisane kocke na osnovi piramide A_1, B_1, C_1, D_1, a na bočnim ivicama A_2, B_2, C_2 i D_2. Neka je $b = A_1B_1$ tražena ivica.
Dijagonala osnove piramide je $AC = 5\sqrt{2}\sqrt{2} = 10$, dijagonala osnove kocke je $A_2C_2 = b\sqrt{2}$.
Pitagorina teorema za polovinu jednakokrakog trougla ACE daje visinu piramide $H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Iz sličnosti trouglova ACE i A_2C_2E sledi proporcija:

$$\frac{12-b}{12} = \frac{b\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow 120 - 10b = 12\sqrt{2}b \Leftrightarrow b = \frac{120}{12\sqrt{2}+10} = \frac{60}{6\sqrt{2}+5} = \frac{360\sqrt{2}-300}{47}.$$