

**REŠENJA ZADATAKA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE - ELEKTROTEHNIKA,
RAČUNARSTVO I MEHATRONIKA,
FTN NOVI SAD 27.06.2009.**

1. a) Rešiti jednačinu $\log_4(12 \cdot 2^x + 64) = x$.
b) Rešiti nejednačinu $\log_x(x^2 - 6) < 1$.

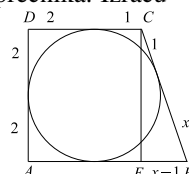
Rešenje:

- a) $\log_4(12 \cdot 2^x + 64) = x \Leftrightarrow 12 \cdot 2^x + 64 = 4^x \Leftrightarrow 4^x - 12 \cdot 2^x - 64 = 0$. Uvođenjem smene $t = 2^x$ dobija se $t^2 - 12t - 64 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 16 \vee 2^x = -4 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$.
- b) Nejednačina je definisana za $x \in (\sqrt{6}, \infty)$. $\log_x(x^2 - 6) < 1 \Leftrightarrow x^2 - 6 < x$, tj. $x^2 - x - 6 < 0$ čije je rešenje $x \in (-2, 3)$ što u preseku sa $x \in (\sqrt{6}, \infty)$ daje $x \in (\sqrt{6}, 3)$.

2. Pravi trougla trapez je opisan oko kruga poluprečnika 2, a jedna osnovica trapeza je za 50% veća od tog poluprečnika. Izračunati površinu P tog trapeza.

Rešenje:

Na slici je prikazan izgled zadatog trapeza. Iz trougla EBC primenom Pitagorine teoreme dobijamo $(x+1)^2 = 4^2 + (x-1)^2 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$. Tražena površina je $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{6+3}{2} \cdot 4 = 18$.




3. Na koliko različitih načina Vlada, Aca i Mila mogu podeliti 5 knjiga, pri čemu može da se desi da neko nije dobio nijednu knjigu ako se:

- a) knjige razlikuju
b) knjige ne razlikuju.

Rešenje:

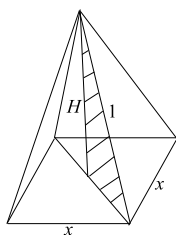
- a) Broj načina na koji se knjige mogu podeliti ako se razlikuju predstavlja broj varijacija sa ponavljanjem pete klase od 3 elementa i iznosi $\bar{V}_5^3 = 3^5 = 243$.

- b)  Broj načina na koji se knjige mogu podeliti ako se ne razlikuju predstavlja broj permutacija od 7 elemenata od kojih je 5 istih i 2 ista i iznosi $\bar{P}_{5,2}(7) = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

4. Bočne ivice prave pravilne četverostrane piramide su jednake 1, a ivica njene kvadratne osnove jednaka je x .

- a) Odrediti zapreminu $V(x)$ te piramide u zavisnosti od x .
b) Odrediti za koje x_1 funkcija $W(x)$ ima maksimum, ako je $W(x) = 18V^2(x)$.
c) Da li je i zapremina $V(x)$ maksimalna za tu istu vrednost x_1 ? Ako jeste izračunati $V_{max} = V(x_1)$.

Rešenje:



- a) Potrebno je odrediti visinu H zadate piramide. Primenom Pitagorine teoreme dobija se da je $H = \sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$, $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Zapremina posmatrane piramide je $V = \frac{1}{3}BH = \frac{x^2}{3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$, $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

- b) $W(x) = 18V^2(x) = 18\frac{x^4}{9}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2x^4 - x^6$. $W'(x) = 8x^3 - 6x^5$, pa je $W'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3(4 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{2\sqrt{3}}{3})$. Kako je x ivica osnove piramide to mora biti $x > 0$. $W''(x) = 24x^2 - 30x^4$, pa je $W''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) < 0$ i funkcija $W(x)$ ima maksimum u tački $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

- c) Funkcija $V(x)$ je pozitivna, funkcije $V(x)$ i $W(x)$ su neprekidne te $V(x)$ i $W(x)$ istovremeno rastu i opadaju što znači da moraju imati ekstrem u istoj tački. Zapremina $V(x)$ je maksimalna za istu vrednost $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $V_{max} = V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{27}$.

5. Neka je $\vec{a} = 8\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 11\vec{k}$ i $\vec{c} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 7\vec{k}$, gde su \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} jedinični međusobno normalni vektori.

- a) Izračunati intenzitete vektora \vec{a} i \vec{b} .
b) Izračunati kosinus ugla ψ između vektora \vec{a} i \vec{b} i ispitati da li je $\psi < 60^\circ$ ili je $\psi > 60^\circ$ ili je $\psi = 60^\circ$.
c) razložiti vektor \vec{c} u pravcu vektora \vec{a} i \vec{b} tj. napisati ga u obliku $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, gde su α i β neki realni brojevi.

Rešenje:

- a) $|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} = \sqrt{225} = 15$.
- b) Kako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 70$, $|\vec{a}| = 9$ i $|\vec{b}| = 15$ to je $\cos \psi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{14}{27} > \frac{1}{2}$. Kako je $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ i funkcija $\cos x$ je opadajuća na intervalu $(0, \pi)$ to je $\psi < 60^\circ$.
- c) $(6, -9, -7) = \alpha(8, 1, 4) + \beta(2, 10, 11) \Leftrightarrow (6 = 8\alpha + 2\beta \wedge -9 = \alpha + 10\beta \wedge -7 = 4\alpha + 11\beta) \Leftrightarrow \alpha = 1 \wedge \beta = -1$, tj. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

6. Neka je $z = 1 + i$ kompleksni broj. Izračunati:

- modul od z tj. $|z|$.
- argument od z tj. $\arg z$.
- realni i imaginarni deo broja z^{2009} tj. $Re(z^{2009})$ i $Im(z^{2009})$.

Rešenje:

- $|z| = \sqrt{2}$.
- $\arg z = \frac{\pi}{4}$.
- $z^{2009} = (1+i)^{2009} = ((1+i)^2)^{1004} \cdot (1+i) = (2i)^{1004} \cdot (1+i) = 2^{1004} \cdot i^{4 \cdot 251} \cdot (1+i) = 2^{1004} \cdot (1+i)$.
 $Re(z^{2009}) = Im(z^{2009}) = 2^{1004}$.

7. Najveće rešenje b_1 jednačine $\sqrt{\frac{x^2+1}{5x-5}} = 1$ je prvi član geometrijskoga niza, a $b_4 = 81$ je četvrti član toga istoga geometrijskoga niza.

- Izračunati zbir prvih n članova toga niza, $S_n = b_1 + \dots + b_n$.
- Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3^{n+1}}$.

Rešenje:

- Jednačina je definisana za $\frac{x^2+1}{5x-5} \geq 0$, tj. $x > 1$. $\sqrt{\frac{x^2+1}{5x-5}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{5x-5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{5x-5} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$, pa je prvi član geometrijskoga niza b_1 jednak $b_1 = 3$. Kako je $b_1 = 3$, a $b_4 = 81$ radi se o geometrijskom nizu $b_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$. Zbir prvih n članova niza geometrijskoga niza b_n je $S_n = 3 \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^n - 1)$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}(3^n - 1)}{3^{n+1}} = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^{n+1}} = \frac{3}{2}$.

8. Naći sve realne vrednosti parametra m za koje je $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ za svaki realni broj x .

Rešenje: Posmatrajmo funkciju $y = mx^2 - 4x + 3m + 1$. Da bi grafik ove funkcije bila parabola sa otvorom okrenutim nagore potrebno je da bude $m > 0$. Kako je $D = (-4)^2 - 4m(3m + 1)$ i s obzirom da je $D = 0$ za $m_1 = -\frac{4}{3}, m_2 = 1$, to je $D < 0$ za $m \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (1, \infty)$. Prema tome $y > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ ako je $m \in (1, \infty)$.

9. Neka je funkcija $f(x)$ definisana sa $f(x) = 5 - 6 \sin 2x - \cos 4x$.

- Naći nule funkcije $f(x)$.
- Rešiti nejednačinu $f(x) \geq 0$.

Rešenje:

- $f(x) = 5 - 6 \sin 2x - \cos 4x = 5 - 6 \sin 2x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 5 - 6 \sin 2x - (1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x) = 4 - 6 \sin 2x + 2 \sin^2 2x$. Uvođenjem smene $t = \sin 2x$ dobija se jednačina $2t^2 - 6t + 4 = 0$ tj. $t^2 - 3t + 2 = 0$ čija su rešenja $t = 1 \vee t = 2$, što daje $\sin 2x = 1 \vee \sin 2x = 2$. Jednačina $\sin 2x = 2$ nema rešenja, a $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Da bi nejednačina $f(x) \geq 0$ bila zadovoljena potrebno je da važi $\sin 2x \notin (1, 2)$, a to važi za sve $x \in \mathbb{R}$.

10. Neka je funkcija $f(x)$ definisana sa $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}$.

- Naći $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x)$ i nule funkcije $f(x)$.
- Naći tačke u kojima je $f'(x) = 0$ i odrediti intervale u kojima funkcija $f(x)$ raste tj. gde je $f'(x) > 0$.
- Da li u svim tačkama u kojima je $f'(x) = 0$ funkcija $f(x)$ ima ekstremne vrednosti?
- Naći jednačinu tangente t grafika funkcije $f(x)$ u tački $A(-2, y_0)$.

Rešenje:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 10}{x + 1} = 6$,
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 5) = 0$.
- $f'(x) = \frac{(x^2 + 7x + 10)'(x + 1) - (x^2 + 7x + 10)(x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0$,
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$,
- Kako važi i $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (-1, 1)$, i kako je funkcija $f(x)$ neprekidna na celjoj oblasti definisanosti $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ to funkcija $f(x)$ u tački $x_1 = -3$ ima maksimum a u tački $x_2 = 1$ ima minimum.
- Za $x_0 = -2$ je $y_0 = f(x_0) = 0$ i $f'(-2) = -3$. Jednačina tangente t glasi $t: y - 0 = -3(x + 2) \Leftrightarrow y = -3x - 6$.