Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE
Saobraćaj, Građevinarstvo i Geodezija i geomatika
30.06.2011.

1. Označimo sa x_1 i x_2 korene (nule) kvadratne funkcije $y = ax^2 - 4x - a - 1$. Odrediti realan parametar a tako da važi $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2}$ i da pri tom data funkcija ima maksimum.

Primenom Vietovih pravila dobijamo:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\tfrac{4}{a})^2 - 2\tfrac{-a-1}{a} = \tfrac{16+2a^2+2a}{a^2} = \tfrac{5}{2}.$$

Prethodna jednakost je ekvivalentna jednačini $-a^2 + 4a + 32 = 0$ čija su rešenja $a_1 = -4$ i $a_2 = 8$. Kvadratna funkcija ima maksimum ako je $a < 0$, stoga je konačno rešenje $a = -4$.

2. Data je funkcija $f(x) = \frac{x-13}{x-3}$.
   a) Rešiti nejednačinu $f(x) \geq 1 - x$.
   b) Odrediti $f'(x)$.
   c) Napisati jednačinu tangente date krive u tački $T(1, y_0)$ krive.

a) Nejednačina je definisana za $x \neq 3$.

$$\tfrac{x-13}{x-3} \geq 1 - x \;\Leftrightarrow\; \tfrac{x^2-3x-10}{x-3} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{(x-5)(x+2)}{x-3} \geq 0.$$

Ispitivanjem znaka prethodnog racionalnog izraza dobijamo rešenje $x \in [-2, 3) \cup [5, \infty)$.

b) $f'(x) = (\frac{x-13}{x-3})' = \frac{x-3-x+13}{(x-3)^2} = \frac{10}{(x-3)^2}$.

c) $y_0 = f(1) = \frac{1-13}{1-3} = 6$, $f'(1) = \frac{10}{(1-3)^2} = \frac{5}{2}$, tako da je jednačina tangente krive $f(x)$ u $T(1, 6)$:

$$t:\; y - 6 = \tfrac{5}{2}(x - 1) \;\Leftrightarrow\; t:\; y = \tfrac{5}{2}x + \tfrac{7}{2}.$$

3. Rešiti jednačinu $\log_5(2 \cdot 4^{x+1} + 7) - 2\log_{\frac{1}{5}} 2^x = 0$.

Jednačina je definisana za $x \in \mathbb{R}$. Primenom osobina i definicije logaritma dobijamo:

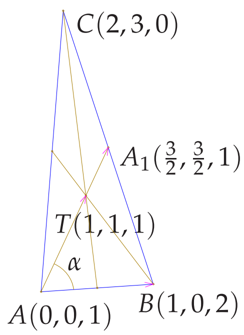
$$\log_5(2 \cdot 4^{x+1} + 7) - 2\log_{\frac{1}{5}} 2^x = 0 \;\Leftrightarrow\; \log_5(2 \cdot 4^{x+1} + 7) + \log_5 2^{2x} = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\log_5((2 \cdot 4^{x+1} + 7) \cdot 4^x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot 4^{2x+1} + 7 \cdot 4^x = 1.$$

Smenom $t = 4^x$ eksponencijalnu jednačinu svodimo na $8t^2 + 7t - 1 = 0$ čija su rešenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{1}{8}$. Rešenje $t_1 < 0$ pa ga odbacujemo. Iz $4^x = \frac{1}{8}$ tj. $2^{2x} = 2^{-3}$ dobijamo konačno rešenje $x = -\frac{3}{2}$.

4. Rešiti nejednačinu $2\sin^2 x + 3\cos x > 0$ u intervalu $(-\pi, \pi]$.

Primenom osnovnog trigonometrijskog identiteta dobijamo:
$2\sin^2 x + 3\cos x > 0 \;\Leftrightarrow\; 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x > 0$. Uvođenjem smene $\cos x = t$ dobijamo kvadratnu nejednačinu $-2t^2 + 3t + 2 > 0$ čije je rešenje $t \in (-\frac{1}{2}, 2)$. Zbog $|\cos x| \leq 1$ dobijamo da $\cos x \in (-\frac{1}{2}, 1]$, odakle u intervalu $(-\pi, \pi]$ dobijamo konačno rešenje $x \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

5. Data su temena $A(0,0,1)$ i $B(1,0,2)$ i težište $T(1,1,1)$ trougla ABC.
   a) Odrediti ugao između stranice AB i težišne linije AA_1.
   b) Odrediti koordinate trećeg temena trougla ABC.



a) Ugao $\alpha = \angle(AB, AA_1) = \angle(AB, AT)$ dobijamo iz $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AT}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AT}|}$.

Kako je $\overrightarrow{AB} = (1,0,2) - (0,0,1) = (1,0,1)$ i $\overrightarrow{AT} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$, sledi da je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AT} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ i $|\overrightarrow{AT}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, pa je $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ odakle je $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

b) Koordinate temena C ćemo odrediti iz vektorskih jednakosti $\frac{1}{2}\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TA_1}$ i $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{A_1C}$. Neka je $A_1(x, y, z)$ i $C(p, q, r)$. Iz prve jednakosti dobijamo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (x - 1, y - 1, z - 1)$ odakle je $A_1(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$. Iz druge jednakosti imamo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1) = (p - \frac{3}{2}, q - \frac{3}{2}, r - 1)$ pa je $C(2,3,0)$.

6. Dat je kvadrat i oko njega opisana kružnica k.

   a) Napisati jednačinu kružnice k ako su poznata naspramna temena kvadrata $A(-1,-3)$ i $C(5,5)$.

   b) Odrediti jednačinu prave koja sadrži preostala dva temena kvadrata i izračunati njihove koordinate.

a) Dijagonala AC kvadrata je prečnik kružnice, pa je centar O sredina duži AC: $O(\frac{-1+5}{2}, \frac{-3+5}{2}) = O(2,1)$, a poluprečnik $r = AO = \sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2} = 5$. Jednačina kružnice je $\underline{k : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25}$.

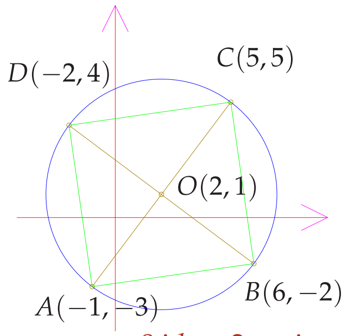
b) Temena B i D su tačke preseka kružnice k i prave p koja sadrži tačku O i normalna je na pravu $q(A,C)$. Koeficijent pravca prave $q(A,C)$ je $k_q = \frac{5-(-3)}{5-(-1)} = \frac{4}{3}$ pa je $k_p = -\frac{3}{4}$. Uvrštavanjem koordinata tačke O u jednačinu prave $p : y = -\frac{3}{4}x + n$ dobijamo $1 = -\frac{3}{4}\cdot 2 + n \Rightarrow n = \frac{5}{2}$. Dakle, $\underline{y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}}$.

$$(x,y) \in k \cap p \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \wedge y = \frac{-3x+10}{4}$$

$$(x-2)^2 + (\frac{-3x+6}{4})^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 + \frac{9}{16}(x-2)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x = x_1 = 6 \vee x = x_2 = -2.$$



Konačno, $y_1 = \frac{-3\cdot 6+10}{4} = -2$ i $y_2 = \frac{-3\cdot(-2)+10}{4} = 4$, pa $\underline{B(6,-2)}$ i $\underline{D(-2,4)}$.

7. U pravu pravilnu zarubljenu četvorostranu piramidu, kod koje su ivice osnova $a = 8$ i $b = 2$, upisana je sfera. Izračunati bočnu ivicu zarubljene piramide i njenu zapreminu.

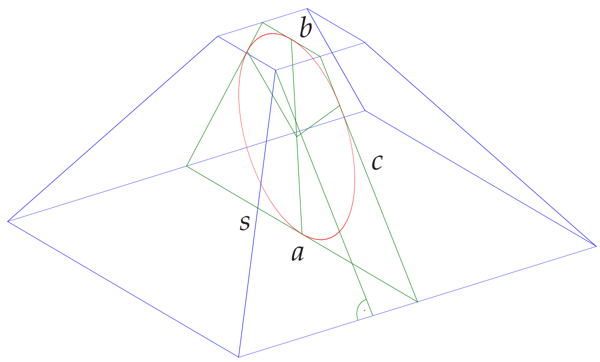
Poprečni presek ove zarubljene piramide je jednakokraki trapez osnovica $a = 8$ i $b = 2$ i krakova c. Ako je u piramidu upisana sfera, onda je u trapez upisana kružnica tj. on je tangentni, odakle zaključujemo da je $a + b = c + c \Rightarrow c = (8+2) : 2 = 5$. Visina trapeza je ujedno i visina zarubljene piramide i računamo je primenom Pitagorine teoreme

$$H^2 = c^2 - (\tfrac{a-b}{2})^2 \Rightarrow H = \sqrt{25-9} = 4.$$

Zapremina $V = \frac{1}{3}\cdot 4(8^2 + \sqrt{8^2\cdot 2^2} + 2^2) = \underline{112}$.

Bočna strana zarubljene piramide je jednakokraki trapez osnovica $a = 8$ i $b = 2$, visine $c = 5$ i krakova s koji ujedno predstavljaju i bočne ivice ove piramide. Stoga

$$s^2 = c^2 + (\tfrac{a-b}{2})^2 \Rightarrow s = \sqrt{25+9} = \underline{\sqrt{34}}.$$



8. Dokazati da je $17^n + 7\cdot 9^n$ deljivo sa 8 za svaki prirodan broj n.

Zadatak rešavamo principom matematičke indukcije. $T(1)$ je tačno jer je $17^1 + 7\cdot 9^1 = 17 + 63 = 80 = 8\cdot 10$. Po indukcijskoj hipotezi $17^n + 7\cdot 9^n = 8M$, za neko $M \in \mathbb{N}$. Sada pokazujemo tvrđenje za $n+1$:

$$T(n+1): \ 17^{n+1} + 7\cdot 9^{n+1} = 17\cdot 17^n + 7\cdot 9\cdot 9^n = (8+9)17^n + 7\cdot 9\cdot 9^n = 9(17^n + 7\cdot 9^n) + 8\cdot 17^n.$$

Dakle, $17^{n+1} + 7\cdot 9^{n+1} = 9\cdot 8M + 8\cdot 17^n = 8\cdot(9M + 17^n)$ je deljiv sa 8.

9. Zbir prva tri člana opadajuće aritmetičke progresije je 21, a proizvod 168. Odrediti zbir prvih 100 članova te progresije.

Prva tri člana aritmetičke progresije su a_1, $a_2 = a_1 + d$ i $a_3 = a_1 + 2d$.
Iz uslova $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3a_1 + 3d = 21$ dobijamo da je $a_1 + d = 7 \Rightarrow a_1 = 7 - d$. Uvrštavanjem ove smene u uslov $a_1a_2a_3 = 168$ dobijamo

$$a_1(a_1+d)(a_1+2d) = (7-d)\cdot 7\cdot(7+d) = 168 \Leftrightarrow 49 - d^2 = 24 \Leftrightarrow d = d_1 = 5 \vee d = d_2 = -5.$$

Progresija je opadajuća ako je diferencija $d < 0$ tako da uzimamo rešenje $d = -5$ odakle je $a_1 = 12$. Konačno, $S_{100} = \frac{100}{2}(2\cdot 12 + (100-1)(-5)) = 50\cdot(-471) \Rightarrow \underline{S_{100} = -23550}$.

10. Izračunati $z = 7 + 5i + (1+i)^5 + \frac{3-i}{-1+i}$.

$$(1+i)^5 = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}})^5 = \sqrt{2^5}e^{\frac{5\pi i}{4}} = 4\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -4 - 4i.$$

Dalje, $\dfrac{3-i}{-1+i}\cdot\dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{-3-3i+i-1}{2} = -2 - i$. Konačno, $\underline{z = 7 + 5i - 4 - 4i - 2 - i = 1}$.