

ZADACI ZA PRIJEMNI ISPIT IZ  
M A T E M A T I K E  
01. 07. 2011.

1. Rešiti nejednačinu  $\frac{2x}{x^2 + x - 2} > 1$ .
2. Rešiti trigonometrijsku jednačinu  $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 3$ .
3. a) Rešiti eksponencijalnu jednačinu  $4^x + 4^{x+2} = 68$ .  
b) Rešiti logaritamsku jednačinu  $\log_2 x - 5 + 4 \log_x 2 = 0$ .
4. U razvoju binoma  $(x + \sqrt{x})^5$ ,  $x > 0$  odrediti koeficijent uz  $x^3$ .
5. U funkciji  $f(x) = ax^2 + bx - 1$  odrediti realne parametre  $a$  i  $b$  takve da je  $f(\frac{3}{2}) = 5$  i  $f(-1) = 0$ .
6. Data je funkcija  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x-4}$ . Odrediti domen (oblast definisanosti) funkcije, nule funkcije i  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
7. Za funkciju  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  odrediti intervale monotonosti (rasta i opadanja) i ekstremne vrednosti (minimum, maksimum).
8. Površina jednakokrakog trougla je  $P = 12 \text{ cm}^2$ , a visina koja odgovara osnovici je  $h_a = 4 \text{ cm}$ . Izračunati obim trougla.
9. Osnova prave piramide je pravougaonik čija je dijagonala  $d = 2\sqrt{5} \text{ cm}$  i  $a : b = 1 : 2$ , gde su sa  $a$  i  $b$  označene dužine stranica pravougaonika. Ako je visina piramide  $H = 3 \text{ cm}$  naći njenu zapreminu.
10. Za kompleksne brojeve  $z_1 = 1 + i$  i  $z_2 = -3i$  izračunati  $z_1 + z_2$ ,  $2z_1 - z_2$ ,  $z_1 z_2$  i  $\frac{z_1}{z_2}$ .

REŠENJA ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT IZ  
M A T E M A T I K E  
01. 07. 2011.

1. Rešiti nejednačinu  $\frac{2x}{x^2 + x - 2} > 1$ .

Za  $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -2\}$ :  $\frac{2x}{x^2 + x - 2} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + x - 2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} > 0$ ,  
te je rešenje date nejednačine  $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ .

2. Rešiti trigonometrijsku jednačinu  $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 3$ .

Uvodjenjem smene  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  dobija se jednačina  $-2 \sin^2 x + 3 \sin x - 1 = 0$  čija su rešenja  $\sin x = 1$  i  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Rešenja jednačine  $\sin x = 1$  su  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .

Rešenja jednačine  $\sin x = \frac{1}{2}$  su  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$  i  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .

3. a) Rešiti eksponencijalnu jednačinu  $4^x + 4^{x+2} = 68$ .

$$4^x + 4^{x+2} = 68 \Leftrightarrow 4^x(1 + 4^2) = 68 \Leftrightarrow 17 \cdot 4^x = 68 \Leftrightarrow 4^x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

b) Rešiti logaritamsku jednačinu  $\log_2 x - 5 + 4 \log_x 2 = 0$ .

Data logaritamska jednačina je definisana za  $x > 0$  i  $x \neq 1$ .

$\log_2 x - 5 + 4 \log_x 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x - 5 + 4 \frac{1}{\log_2 x} = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 = 0$ . Uvodjenjem smene  $t = \log_2 x$  dobija se kvadratna jednačina  $t^2 - 5t + 4 = 0$ , čija su rešenja  $t = 1$  i  $t = 4$ . Dalje, vraćanjem uvedene smene dobijaju se rešenja polazne jednačine  $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$  i  $\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$ .

4. U razvoju binoma  $(x + \sqrt{x})^5, x > 0$  odrediti koeficijent uz  $x^3$ .

$(x + \sqrt{x})^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k (\sqrt{x})^{5-k} = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{\frac{k+5}{2}}$ . Kako se traži koeficijent uz član koji sadrži  $x^3$ , dobija se jednačina  $\frac{k+5}{2} = 3$  čije je rešenje  $k = 1$ , te je traženi koeficijent  $\binom{5}{1} = 5$ .

5. U funkciji  $f(x) = ax^2 + bx - 1$  odrediti realne parametre  $a$  i  $b$  takve da je  $f(\frac{3}{2}) = 5$  i  $f(-1) = 0$ .

Iz  $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - 1 = 5$  i  $f(-1) = a - b - 1 = 0$  dobija se sistem jednačina  $\frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b = 6 \wedge a - b = 1$  čije je rešenje  $a = 2 \wedge b = 1$ .

6. Data je funkcija  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x-4}$ . Odrediti domen (oblast definisanosti) funkcije, nule funkcije i  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

Funkcija je definisana za  $x^2 - 3x - 4 \neq 0$ , tj. za  $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 4\}$ .

Nule funkcije:  $\frac{x-1}{x^2-3x-4} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-3x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

7. Za funkciju  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$  odrediti intervale monotonosti (rasta i opadanja) i ekstremne vrednosti (minimum, maksimum).

$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x)' = 6x^2 + 6x - 12$ . Rešavanjem jednačine  $f'(x) = 0$  dobijaju se stacionarne tačke funkcije  $x = -2, x = 1$ .

$f(x)$  raste ako i samo ako je  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ .

$f(x)$  opada ako i samo ako je  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$ .

$f''(x) = (6x^2 + 6x - 12)' = 12x + 6$ .

Iz  $f''(-2) < 0$  sledi da je  $A(-2, 20)$  tačka maksimuma.

Iz  $f''(1) > 0$  sledi da je  $B(1, -7)$  tačka minimuma.

8. Površina jednakokrakog trougla je  $P = 12 \text{ cm}^2$ , a visina koja odgovara osnovici je  $h_a = 4 \text{ cm}$ . Izračunati obim trougla.

Iz  $P = \frac{ah_a}{2}$  dobija se  $\frac{4a}{2} = 12$  odakle je  $a = 6$ . Primeom Pitagorine teoreme na pravougli trougao čije su katete  $\frac{a}{2} = 3$  i  $h_a = 4$  i hipotenuza (krak)  $b$  dobija se  $b = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , tako da je traženi obim  $O = a + 2b = 6 + 10 = 16 \text{ cm}$ .

9. Osnova prave piramide je pravougaonik čija je dijagonala  $d = 2\sqrt{5} \text{ cm}$  i  $a : b = 1 : 2$ , gde su sa  $a$  i  $b$  označene dužine stranica pravougaonika. Ako je visina piramide  $H = 3 \text{ cm}$  naći njenu zapreminu.

Zapremina piramide je  $V = \frac{1}{3}B \cdot H$ , gde je sa  $B$  označena površina baze (pravougaonika). Iz  $a : b = 1 : 2$  dobija se  $b = 2a$ . Iz  $d^2 = a^2 + b^2$  i  $b = 2a$  sledi  $20 = 5a^2$ , odakle je  $a = 2 \text{ cm}$  i  $b = 4 \text{ cm}$ . Kako je  $B = ab = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$ , dalje je  $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 3 = 8 \text{ cm}^3$ .

10. Za kompleksne brojeve  $z_1 = 1 + i$  i  $z_2 = -3i$  izračunati  $z_1 + z_2, 2z_1 - z_2, z_1z_2$  i  $\frac{z_1}{z_2}$ .

$$z_1 + z_2 = (1 + i) + (-3i) = 1 - 2i,$$

$$2z_1 - z_2 = 2 \cdot (1 + i) - (-3i) = 2 + 2i + 3i = 2 + 5i,$$

$$z_1z_2 = (1 + i) \cdot (-3i) = -3i - 3i^2 = 3 - 3i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{-3i} = \frac{1 + i}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{3i + 3i^2}{-9i^2} = \frac{-3 + 3i}{9} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i.$$