Rešenja zadataka sa prijemnog ispita održanog 30.6.2009.

1. zadatak

1) $\dfrac{x^{-2}-x^{-4}}{x^{-2}+x^{-3}}=\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^4}}{\dfrac{x+1}{x^3}}=\boxed{\dfrac{x-1}{x}}$

2) $\dfrac{x^{-2}-x^{-4}}{x^{-5}+x^{-6}}=\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^6}}=\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^4}}{\dfrac{x+1}{x^6}}=\boxed{x^2\left(x-1\right)}$

3) $\dfrac{x^{-4}-x^{-2}}{x^{-3}-x^{-2}}=\dfrac{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\dfrac{1-x^2}{x^4}}{\dfrac{1-x}{x^3}}=\boxed{\dfrac{1+x}{x}}$

4) $\dfrac{x^{-4}-x^{-2}}{x^{-6}-x^{-5}}=\dfrac{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^6}-\dfrac{1}{x^5}}=\dfrac{\dfrac{1-x^2}{x^4}}{\dfrac{1-x}{x^6}}=\boxed{x^2\left(1+x\right)}$

2. zadatak

Sva rešenja nejednačine pripadaju skupu:

1) $\dfrac{3x+1}{x-2}<1$ svodi se na $\dfrac{2x+3}{x-2}<0$ $\boxed{x\in\left(-\dfrac{3}{2},2\right)}$

---

2) $\dfrac{4x+1}{x-3}<2$ svodi se na $\dfrac{2x+7}{x-3}<0$ $\boxed{x\in\left(-\dfrac{7}{2},3\right)}$

---

3) $\dfrac{6x+1}{x-4}<2$ svodi se na $\dfrac{4x+9}{x-4}<0$ $\boxed{x\in\left(-\dfrac{9}{4},4\right)}$

---

4) $\dfrac{5x+3}{x-1}<2$ svodi se na $\dfrac{3x+5}{x-1}<0$ $\boxed{x\in\left(-\dfrac{5}{3},1\right)}$

==========-

3. zadatak

1. $\log_4\left(4^x+192\right)=x+1$

$4^x+192=4^{x+1}\quad ;4^x+192=4\cdot 4^x\quad ;3\cdot 64=3\cdot 4^x\quad ;4^x=4^3\quad ;\quad \boxed{x=3}$

---

2. $\log_5\left(5^x+100\right)=x+1$

$5^x+100=5^{x+1}\quad ;5^x+100=5\cdot 5^x\quad ;4\cdot 25=4\cdot 5^x\quad ;5^x=5^2\quad ;\quad \boxed{x=2}$

---

3. $\log_3\left(3^x+54\right)=x+1$

$3^x+54=3^{x+1}\quad ;3^x+54=3\cdot 3^x\quad ;2\cdot 27=2\cdot 3^x\quad ;3^x=27\quad ;\quad \boxed{x=3}$

---

4. $\log_2\left(2^x+28\right)=x+3$

$2^x+28=2^{x+3}\quad ;2^x+28=2^3\cdot 2^x\quad ;28=7\cdot 2^x\quad ;2^x=4\quad ;\quad \boxed{x=2}$

---

4. zadatak

Zbir kvadrata realnih rešenja jednačine iznosi:

1) $x^4 + x^2 - 12 = 0 \qquad t = x^2 \qquad t^2 + t - 12 = 0$

$t_1 = 3 \quad ; \quad t_2 = -4$

$x^2 = 3 \quad ; \quad x^2 = -4$

$\boxed{x_1 = -\sqrt{3}\,;\, x_2 = \sqrt{3}} \quad ; \quad x_3 = -2i \quad ; \quad x_4 = 2i$

Ima dva realna rešenja.

$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 3 + 3 = \boxed{6}$

---

2) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0 \qquad t = x^2 \qquad t^2 - 4t - 5 = 0$

$t_1 = 5 \quad ; \quad t_2 = -1$

$x^2 = 5 \quad ; \quad x^2 = -1$

$\boxed{x_1 = -\sqrt{5}\,;\, x_2 = \sqrt{5}} \quad ; \quad x_3 = -i \quad ; \quad x_4 = i$

Ima dva realna rešenja.

$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 5 + 5 = \boxed{10}$

---

3) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \qquad t = x^2 \qquad t^2 + 2t - 8 = 0$

$t_1 = 2 \quad ; \quad t_2 = -4$

$x^2 = 2 \quad ; \quad x^2 = -4$

$\boxed{x_1 = -\sqrt{2}\,;\, x_2 = \sqrt{2}} \quad ; \quad x_3 = -2i \quad ; \quad x_4 = 2i$

Ima dva realna rešenja.

$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 2 + 2 = \boxed{4}$

---

4) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \qquad t = x^2 \qquad t^2 - 5t - 6 = 0$

$t_1 = 6 \quad ; \quad t_2 = -1$

$x^2 = 6 \quad ; \quad x^2 = -1$

$\boxed{x_1 = -\sqrt{6}\,;\, x_2 = \sqrt{6}} \quad ; \quad x_3 = -i \quad ; \quad x_4 = i$

Ima dva realna rešenja.

$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 6 + 6 = \boxed{12}$

5. zadatak

1) Dati su peti član $a_5 = 5$ i zbir prvih deset članova aritmetičkog niza $S_{10} = \frac{105}{2}$.

Pedeseti član tog niza a_{50} je:

$$\begin{matrix} a_5 = 5 \\ S_{10} = \frac{105}{2} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} a_1 + 4d = 5 \\ \frac{10\left(a_1 + a_1 + 9d\right)}{2} = \frac{105}{2} \end{matrix} \qquad \boxed{a_1 = 3 \quad ; \quad d = \frac{1}{2}} \; 3, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{10}{2}, \frac{11}{2}, \frac{12}{2}, \frac{13}{2}, \cdots$$

$$a_{50} = a_1 + 49d = 3 + \frac{49}{2} = \boxed{\frac{55}{2}}$$

---

2) Dati su sedmi član $a_7 = 6$ i zbir prvih osam članova aritmetičkog niza $S_8 = 38$.

Četrdeseti član tog niza a_{40} je:

$$\begin{matrix} a_7 = 6 \\ S_8 = 38 \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} a_1 + 6d = 6 \\ \frac{8\left(a_1 + a_1 + 7d\right)}{2} = 38 \end{matrix} \qquad \boxed{a_1 = 3 \quad ; \quad d = \frac{1}{2}} \; 3, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{10}{2}, \frac{11}{2}, \frac{12}{2}, \frac{13}{2}, \cdots$$

$$a_{40} = a_1 + 39d = 3 + \frac{39}{2} = \boxed{\frac{45}{2}}$$

---

3) Dati su peti član $a_5 = 4$ i zbir prvih deset članova aritmetičkog niza $S_{10} = \frac{85}{2}$.

Pedeseti član tog niza a_{50} je:

$$\begin{matrix} a_5 = 4 \\ S_{10} = \frac{85}{2} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} a_1 + 4d = 4 \\ \frac{10\left(a_1 + a_1 + 9d\right)}{2} = \frac{85}{2} \end{matrix} \qquad \boxed{a_1 = 2 \quad ; \quad d = \frac{1}{2}} \; 2, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{10}{2}, \frac{11}{2}, \cdots$$

$$a_{50} = a_1 + 49d = 2 + \frac{49}{2} = \boxed{\frac{53}{2}}$$

---

4) Dati su sedmi član $a_7 = 5$ i zbir prvih osam članova aritmetičkog niza $S_8 = 30$.

Četrdeseti član tog niza a_{40} je:

$$\begin{matrix} a_7 = 5 \\ S_8 = 30 \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} a_1 + 6d = 5 \\ \frac{8\left(a_1 + a_1 + 7d\right)}{2} = 30 \end{matrix} \qquad \boxed{a_1 = 2 \quad ; \quad d = \frac{1}{2}} \; 2, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}, \frac{10}{2}, \frac{11}{2}, \cdots$$

$$a_{40} = a_1 + 39d = 2 + \frac{39}{2} = \boxed{\frac{43}{2}}$$

---

6. zadatak

1) Za jednakokraki trapez data je veća osnovica $a=11$, krak $c=6$ i ugao na osnovici $\alpha=60°$.

Proizvod visine i dijagonale trapeza $h\cdot d$ iznosi:

$h=6\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ Označimo sa x polurazliku osnovica.

$x=\frac{c}{2}=3 \qquad d^2=(a-x)^2+h^2 \quad ; \; d=\sqrt{8^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64+27}=\sqrt{91}$

$h\cdot d=3\sqrt{3}\sqrt{91}=\boxed{3\sqrt{273}}$

---

2) Za jednakokraki trapez data je veća osnovica $a=11$, krak $c=4$ i ugao na osnovici $\alpha=60°$.

Proizvod visine i dijagonale trapeza $h\cdot d$ iznosi:

$h=4\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ Označimo sa x polurazliku osnovica.

$x=\frac{c}{2}=2 \qquad d^2=(a-x)^2+h^2 \quad ; \; d=\sqrt{9^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{81+12}=\sqrt{93}$

$h\cdot d=2\sqrt{3}\sqrt{93}=2\sqrt{3}\sqrt{3\cdot 31}=\boxed{6\sqrt{31}}$

---

3) Za jednakokraki trapez data je veća osnovica $a=11$, manja osnovica $b=5$ i ugao na osnovici $\alpha=60°$. Proizvod kraka i dijagonale trapeza $c\cdot d$ iznosi:

Označimo sa x polurazliku osnovica.

$x=\frac{a-b}{2}=3 \qquad c=2x=4 \qquad h=6\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$d^2=(a-x)^2+h^2 \quad ; \; d=\sqrt{8^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64+27}=\sqrt{91}$

$c\cdot d=\boxed{6\sqrt{91}}$

4) Za jednakokraki trapez data je veća osnovica $a=11$, manja osnovica $b=7$ i ugao na osnovici $\alpha=60°$. Proizvod kraka i dijagonale trapeza $c\cdot d$ iznosi:

Označimo sa x polurazliku osnovica.

$x=\frac{a-b}{2}=2 \qquad c=2x=4 \qquad h=4\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$d^2=(a-x)^2+h^2 \quad ; \; d=\sqrt{9^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{81+12}=\sqrt{93}$

$c\cdot d=\boxed{4\sqrt{93}}$

7. zadatak

1) Površina pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovna ivica $a=8$ i ugao koji **bočna strana** zaklapa sa ravni osnove $\alpha=60°$, iznosi:

Neka je h visina bočne strane (apotema). $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{h}=\cos 60^\circ \qquad ; h=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos 60^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$P=B+3P_\triangle=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{ah}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$P=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}=\frac{3}{4}64\sqrt{3}=\boxed{48\sqrt{3}}$$

---

2) Površina pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovna ivica $a=12$ i ugao koji **bočna strana** zaklapa sa ravni osnove $\alpha=60°$, iznosi:

$$P=B+3P_\triangle=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{ah}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$P=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}=\frac{3}{4}144\sqrt{3}=\boxed{108\sqrt{3}}$$

---

3) Omotač pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovna ivica $a=8$ i ugao koji **bočna strana** zaklapa sa ravni osnove $\alpha=45°$, iznosi:

Neka je h visina bočne strane (apotema). $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{h}=\cos 45^\circ \qquad ; h=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos 45^\circ}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

$$M=3P_\triangle=3\cdot\frac{ah}{2}=3\cdot\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}}{2}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{6}$$

$$\boxed{M=16\sqrt{6}}$$

---

4) Omotač pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovna ivica $a=12$ i ugao koji **bočna strana** zaklapa sa ravni osnove $\alpha=45°$, iznosi:

Neka je h visina bočne strane (apotema). $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{h}=\cos 45^\circ \qquad ; h=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos 45^\circ}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

$$M=3P_\triangle=3\cdot\frac{ah}{2}=3\cdot\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}}{2}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{6}$$

$$\boxed{M=36\sqrt{6}}$$

8. zadatak

1) Zbir rešenja jednačine $\sin 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ koja su iz intervala $x \in [0,2\pi)$ je:

$$\sin\left(\underbrace{2x}_{t}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad t_1 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad t_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$2x_1 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad ; \quad 2x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x_1 = \frac{4\pi}{6} + k\pi \quad ; \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$x_1' = \frac{4\pi}{6} \quad ; \quad x_1'' = \frac{4\pi}{6} + \pi \qquad\qquad x_2' = \frac{5\pi}{6} \quad ; \quad x_2'' = \frac{5\pi}{6} + \pi$$

$$x_1' + x_1'' + x_2' + x_2'' = \frac{4\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} + \pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \pi = \boxed{5\pi}$$

2) Zbir rešenja jednačine $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ koja su iz intervala $x \in [0,2\pi)$ je:

$$\sin\left(\underbrace{2x}_{t}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad t_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad t_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; \quad 2x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad ; \quad x_2 = \frac{3\pi}{8} + k\pi$$

$$x_1' = \frac{\pi}{8} \quad ; \quad x_1'' = \frac{\pi}{8} + \pi \qquad\qquad x_2' = \frac{3\pi}{8} \quad ; \quad x_2'' = \frac{3\pi}{8} + \pi$$

$$x_1' + x_1'' + x_2' + x_2'' = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \pi + \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \pi = \boxed{3\pi}$$

3) Zbir rešenja jednačine $tg\,2x = \sqrt{3}$ koja su iz intervala $x \in [0,2\pi)$ je:

$$tg\left(\underbrace{2x}_{t}\right) = \sqrt{3} \qquad ; t = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad ; x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{6} + \underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}}_{x_1} + \underbrace{\frac{\pi}{6} + \pi}_{x_2} + \underbrace{\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}}_{x_3} = \frac{4\pi}{6} + 3\pi = \boxed{\frac{11\pi}{3}}$$

4) Zbir rešenja jednačine $tg\,2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ koja su iz intervala $x \in [0,2\pi)$ je:

$$tg\left(\underbrace{2x}_{t}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad ; t = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad ; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{12} + \underbrace{\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}}_{x_1} + \underbrace{\frac{\pi}{12} + \pi}_{x_2} + \underbrace{\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}}_{x_3} = \frac{4\pi}{12} + 3\pi = \boxed{\frac{10\pi}{3}}$$

9. zadatak

1) Jednačina $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2 \quad |(\ )^2$

$2x+3+x-2-4=2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x-2} \quad |(\ )^2$

$(3x-3)^2=4(2x^2-x-6)$

$x^2-14x+33=0 \quad ; \quad \boxed{x_1=11 \vee x_2=3}$ dva rešenja

2) Jednačina $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$

$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2 \quad |(\ )^2$

$2x+1+x-3-4=2\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3}$

$3x-6=2\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3} \quad |(\ )^2$

$9x^2-36x+36=4(2x^2-2x-3)$

$x^2-16x+48=0 \quad ; \quad \boxed{x_1=12 \vee x_2=4}$ dva rešenja

3) Jednačina $\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+5}=2$

$\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+5}=2 \quad |(\ )^2$

$3x+3+x+5-4=2\sqrt{3x+3}\cdot\sqrt{x+5}$

$4x+4=2\sqrt{3x+3}\cdot\sqrt{x+5}$

$2x+2=\sqrt{3x+3}\cdot\sqrt{x+5} \quad |(\ )^2$

$4x^2+8x+4=3x^2+18x+15$

$x^2-10x-11=0 \quad ; \quad \boxed{x_1=11} \vee x_2=-1$ jedno rešenje

4) Jednačina $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+6}=2$

$\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+6}=2 \quad |(\ )^2$

$3x+6+x+6-4=2\sqrt{3x+6}\cdot\sqrt{x+6}$

$4x+8=\sqrt{3x+6}\cdot\sqrt{x+6}$

$2x+4=\sqrt{3x+6}\cdot\sqrt{x+6} \quad |(\ )^2$

$4x^2+16x+16=3x^2+24x+36$

$x^2-8x-20=0 \quad ; \quad \boxed{x_1=10} \vee x_2=-2$ jedno rešenje

10. zadatak

1) Zbir koordinata tačke N koja je simetrična tački $M\left(3,\frac{1}{2}\right)$ u odnosu na pravu (s) $2x-y-3=0$ iznosi:

Kroz tačku M se postavlja prava (n) koja je normalna na datu pravu (s).

$y-\frac{1}{2}=k(x-3);\qquad k_s=2;\quad k_n=-\frac{1}{k_s}=-\frac{1}{2}$

$(n)\quad y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-3);$

U preseku pravih (n) i (s), rešavanjem sistema , dobijaju se koordinate presečne tačke S.

Ta tačka predstavlja središte duži MN.

$$M\left(3,\frac{1}{2}\right);\ N(x_N,y_N)\quad S\left(\frac{3+x_N}{2},\frac{\frac{1}{2}+y_N}{2}\right)\quad ;\quad S(2,1)$$

$(n)\quad y=-\frac{1}{2}x+2\qquad x=2;\ y=1\quad \frac{3+x_N}{2}=2\ ;\ \frac{\frac{1}{2}+y_N}{2}=1\ ;\ x_N=1;\ y_N=\frac{3}{2}$

$(s)\quad y=2x-3\ ;\qquad S(2,1)$

$N\left(1,\frac{3}{2}\right)$ Odgovor : $x_N+y_N=1+\frac{3}{2}=\boxed{\frac{5}{2}}$

---

2) Zbir koordinata tačke N koja je simetrična tački $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ u odnosu na pravu (s) $2x-y-3=0$ iznosi:

$N\left(3,\frac{1}{2}\right)$ Odgovor : $x_N+y_N=3+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{7}{2}}$

---

3) Zbir koordinata tačke N koja je simetrična tački $M\left(\frac{5}{2},2\right)$ u odnosu na pravu (s) $x+2y-4=0$ iznosi:

$N\left(\frac{3}{2},0\right)$ Odgovor : $x_N+y_N=\frac{3}{2}+0=\boxed{\frac{3}{2}}$

---

4) Zbir koordinata tačke N koja je simetrična tački $M\left(\frac{3}{2},0\right)$ u odnosu na pravu (s) $x+2y-4=0$ iznosi:

$N\left(\frac{5}{2},2\right)$ Odgovor : $x_N+y_N=\frac{5}{2}+2=\boxed{\frac{9}{2}}$