Prof. dr Gospava Đorđević
dr Milan Tasić

MATEMATIKA

UNIVERZITET U NIŠU
Tehnološki fakultet u Leskovcu

ZBIRKA ZADATAKA
ZA POLAGANJE PRIJEMNOG ISPITA SA REŠENJIMA

Leskovac, april 2003. godine

Fakultet utvrđuje jedinstvenu rang listu za kandidate koji se finansiraju iz budžeta ili sami plaćaju školarinu. Mesto na jedinstvenoj rang listi određuje da li kandidat može biti upisan u prvu godinu osnovnih studija, kao i da li će biti finansiran iz budžeta ili će plaćati školarinu. Kandidat koji nije stekao uslov za upis na željeni smer može se upisati na drugi smer ako ima slobodnih mesta u statusu studenta koji se finansira iz budžeta ili sam plaća školarinu.

Ova Zbirka je podeljena u četiri dela. U prvom delu dat je Program za pripremu prijemnog ispita iz Matematike sa 78 rešenih zadataka. Drugi deo sadrži Program za pripremu prijemnog ispita iz Hemije sa 149 rešenih zadataka. U trećem delu dat je Program za polaganje prijemnog ispita iz Fizike sa 162 rešena zadatka i 89 zadataka za samostalni rad. Četvrti deo sadrži Program za polaganje ispita za proveru sklonosti iz predmeta Crtanje sa jednim rešenim primerom.

Zadatke u Zbirci sastavili su profesori koji na Fakultetu realizuju nastavu i vežbe iz odgovarajućih predmeta, i to: prof. dr Gospava Đorđević i dr Milan Tasić (Matematika), prof. dr Petar Ilić, prof. dr Siniša Đorđević i prof. dr Dragan Cvetković (Hemija), prof. dr Momčilo Kocić (Fizika) i mr Srđan Cakić (Crtanje).

Želja je autora da ovom Zbirkom omogući kvalitetniju i lakšu pripremu prijemnog ispita za upis u prvu godinu osnovnih studija na Tehnološkom fakultetu u Leskovcu.

Prodekan za obrazovnu delatnost
Prof. dr Milorad Cakić

Program za polaganje prijemnog ispita iz **Matematike**

1. Kvadratne jednačine. Kvadratne nejednačine. Vietove formule.
2. Eksponencijalne jednačine i nejednačine. Logaritamske jednačine i nejednačine. Jednostavnije iracionalne jednačine i nejednačine.
3. Aritmetički i geometrijski niz.
4. Trigonometrija: Prostije trigonometrijske jednačine, osnovne trigonometrijske transformacije. Sinusna i kosinusna teorema i primena.
5. Planimetrija: Podudarnost trouglova. Sličnost trouglova. Izračunavanje površine ravnih figura: trougla, četvorougla, kruga. Obim kruga, dužina kružnog luka.
6. Stereometrija: Prizma, piramida, zarubljena piramida. Valjak, kupa, lopta - površina i zapremina.

Literatura:

1. Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović: Matematika I, Zbirka zadataka i testova za I razred gimnazije i tehničkih škola;
2. Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović: Matematika II, Zbirka zadataka i testova za II razred gimnazije i tehničkih škola;
3. Srđan Ognjanović, Živorad Ivanović: Matematika III, Zbirka zadataka za III razred gimnazije i tehničkih škola;
4. Vene Bogoslavov: Zbirka zadataka za I, II i III razred gimnazije i tehničkih škola.

Mogu se koristiti i druge zbirke zadataka iz Matematike predviđene za srednje škole i gimnazije.

Zadatak 1. Skratiti razlomke i zapisati uslove pod kojima dobijene jednakosti važe:

1. $\dfrac{a^2-8a+16}{b\left(a^2-4a\right)}$;

2. $\dfrac{x^3y-x^2y^2}{x^3y(x-y)}$;

3. $\dfrac{a^2+ab+a+b}{a^2+2ab+b^2}$;

4. $\dfrac{ab+ac-c^2-bc}{bc+c^2+2ab+2ac}$;

5. $\dfrac{a^2\left(a^3-a^2+a+1\right)}{a^2\left(3a^3-3a^2\right)+3\left(a^2+a^3\right)}$;

6. $\dfrac{c^3+8}{c^2(c-4)+8(c-1)}$.

Rešenje:

1. $\dfrac{a^2-8a+16}{b\left(a^2-4a\right)}=\dfrac{a^2-4a-4a+16}{b[a(a-4)]}=\dfrac{a(a-4)-4(a-4)}{ab(a-4)}=\dfrac{(a-4)(a-4)}{ab(a-4)}=\dfrac{a-4}{ab}$,

   $a \neq 0,\ a \neq 4,\ b \neq 0.$

2. $\dfrac{x^3y-x^2y^2}{x^3y(x-y)}=\dfrac{x^2y(x-y)}{x^3y(x-y)}=\dfrac{x^2y}{x^3y}=\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq y.$

3. $\dfrac{a^2+ab+a+b}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{a(a+b)+(a+b)}{(a+b)^2}=\dfrac{(a+b)(a+1)}{(a+b)^2}=\dfrac{a+1}{a+b}$, $a+b \neq 0.$

4. $\dfrac{ab+ac-c^2-bc}{bc+c^2+2ab+2ac}=\dfrac{a(b+c)-c(b+c)}{c(b+c)+2a(b+c)}=\dfrac{(b+c)(a-c)}{(b+c)(c+2a)}=\dfrac{a-c}{c+2a}$,

   $b+c \neq 0,\ \ c+2a \neq 0.$

5. $\dfrac{a^2\left(a^3-a^2+a+1\right)}{a^2\left(3a^3-3a^2\right)+3\left(a^2+a^3\right)}=\dfrac{a^2\left[a^2(a-1)+a+1\right]}{3a^4(a-1)+3a^2(1+a)}=\dfrac{a\left(a^3-a^2+a+1\right)}{3a^2\left(a^3-a^2+a+1\right)}=\dfrac{1}{3a}$,

   $a \neq 0.$

6. $\dfrac{c^3+8}{c^2(c-4)+8(c-1)}=\dfrac{(c+2)(c^2-2c+4)}{c^3-4c^2+8c-8}=\dfrac{(c+2)(c^2-2c+4)}{(c-2)(c^2+2c+4)-4c(c-2)}=$

$=\dfrac{(c+2)(c^2-2c+4)}{(c-2)(c^2+2c+4-4c)}=\dfrac{(c+2)(c^2-2c+4)}{(c-2)(c^2-2c+4)}=\dfrac{c+2}{c-2}$, $c-2\neq 0$.

Zadatak 2. Izvršiti naznačene operacije:

1. $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{3a}{a+x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}$;

2. $\dfrac{16x-x^2}{x^2-4}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}$;

3. $\dfrac{a^2}{(a+b)^3}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{(a+b)^3}$;

4. $\dfrac{4x^2-8xy}{x}+\dfrac{2x^4-8x^3y+8x^2y^2}{x^4-2x^3y}-\dfrac{1-x}{2}$;

5. $\left(\dfrac{15x^3}{y^4}-\dfrac{5x}{y^2}+\dfrac{5}{x}\right):\left(\dfrac{3x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}\right)$;

6. $\dfrac{a-2}{a-4}\left(\dfrac{4a}{a^2-4}+\dfrac{a}{6-3a}+\dfrac{a}{a+2}\right)$;

7. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right):\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)+\dfrac{2}{ab}:\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2$.

Rešenje:

1. $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{3a}{a+x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}=\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{3a}{a+x}-\dfrac{2ax}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{a(a+x)+3a(a-x)-2ax}{(a-x)(a+x)}=$

$=\dfrac{a^2+ax+3a^2-3ax-2ax}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{4a^2-4ax}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{4a(a-x)}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{4a}{a+x}$,

$a-x\neq 0$, $a+x\neq 0$.

2. $\dfrac{16x-x^2}{x^2-4}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}=\dfrac{16x-x^2}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{3+2x}{x-2}-\dfrac{2-3x}{x+2}=$

$=\dfrac{16x-x^2-(3+2x)(x+2)-(2-3x)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$

$=\dfrac{16x-x^2-3x-6-2x^2-4x-2x+4+3x^2-6x}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}$,

$x-2\neq 0$, $x+2\neq 0$.

3. $\frac{a^2}{(a+b)^3}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{a^2-(a+b)^2+1}{(a+b)^3}=\frac{a^2-a^2-2ab-b^2+1}{(a+b)^3}=$
$=-\frac{2ab+b^2-1}{(a+b)^3}$

4. $\frac{4x^2-8xy}{x}+\frac{2x^4-8x^3y+8x^2y^2}{x^4-2x^3y}-\frac{1-x}{2}=4x-8y+\frac{2x^2\left(x^2-4xy+4y^2\right)}{x^3(x-2y)}+\frac{x-1}{2}=$
$=\frac{4x-8y}{1}+\frac{2(x-2y)^2}{x(x-2y)}+\frac{x-1}{2}=\frac{4x-8y}{1}+\frac{2(x-2y)}{x}+\frac{x-1}{2}=$
$=\frac{2x(4x-8y)+4(x-2y)+x(x-1)}{2x}=\frac{8x^2-16xy+4x-8y+x^2-x}{2x}=$
$=\frac{9x^2+3x-16xy-8y}{2x}=\frac{3x(3x+1)-8y(2x+1)}{2x}$

5. $\left(\frac{15x^3}{y^4}-\frac{5x}{y^2}+\frac{5}{x}\right):\left(\frac{3x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)=\frac{15x^4-5x^2y^2+5y^4}{y^4x}:\frac{3x^4-x^2y^2+y^4}{y^3x^2}=$
$=\frac{5\left(3x^4-x^2y^2+y^4\right)}{xy^4}\cdot\frac{x^2y^3}{3x^4-x^2y^2+y^4}=\frac{5x}{y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

6. $\frac{a-2}{a-4}\left(\frac{4a}{a^2-4}+\frac{a}{6-3a}+\frac{a}{a+2}\right)=\frac{a-2}{a-4}\left(\frac{4a}{(a-2)(a+2)}+\frac{a}{3(2-a)}+\frac{a}{a+2}\right)=$
$=\frac{a-2}{a-4}\cdot\frac{12a-a(a+2)+3a(a-2)}{3(a-2)(a+2)}=\frac{12a-a^2-2a+3a^2-6a}{3(a-4)(a+2)}=$
$=\frac{2a^2+4a}{3(a-4)(a+2)}=\frac{2a(a+2)}{3(a-4)(a+2)}=\frac{2a}{2(a-4)}$, $a+2\neq 0$, $a-4\neq 0$.

7. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{2}{ab}:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{ab}:\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}+\frac{2}{ab}:\left(\frac{b+a}{ab}\right)^2=$
$=\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{2}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{2ab}{(a+b)^2}=$
$=\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$.

Zadatak 3. Rešiti nejednačine:

1. $(x+1)(x+2)+3(1-x)<(x-1)^2$;

2. $\frac{x-2}{2x+1}<0$;

3. $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$;

4. $\frac{x+1}{x+2}>\frac{x}{x+1}$;

5. $\frac{2x-3}{x-4}\leq 1$;

6. $0<\frac{3x-1}{2x+5}<2$;

7. $\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}<2$;

8. $\frac{x-3}{x-1}>\frac{x-5}{x-3}$.

Rešenje:

1. $(x+1)(x+2)+3(1-x)< (x-1)^2$

$x^2+3x+2+3-3x-(1-x)^2<0$

$x^2+5-x^2+2x-1<0$

$2x<-4$

$x<-2$

2. $\frac{x-2}{2x+1}<0 \ (=)\ (x-2>0 \ \wedge\ 2x+1<0) \vee (x-2<0 \wedge 2x+1>0)\ (=)$

$(=)\ (x>2 \wedge x<-\frac{1}{2}) \vee (x<2 \wedge x>-\frac{1}{2})\ (=)\ -\frac{1}{2}<x<2$

3. $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6} /\cdot 24$

$72-36x>15-4(4x-3)$

$72-36x>15-16x+12$

$-20x>27-72 \ /\cdot (-1)$

$20x<45 \Rightarrow x<\frac{45}{20} \Rightarrow x<\frac{9}{4}$

4. $\frac{x+1}{x+2}>\frac{x}{x+1}$

$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x+1}>0$

$$\frac{(x+1)^2-x(x+2)}{(x+2)(x+1)}>0\ ; \qquad \frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{(x+2)(x+1)}>0$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)}>0 \text{ za } x\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$$

5. $\dfrac{2x-3}{x-4}\le 1$

$$\frac{2x-3}{x-4}-1\le 0\ ; \qquad \frac{2x-3-x+4}{x-4}\le 0$$

$$\frac{x+1}{x-4}\le 0 \text{ za } x\in[-1,4)$$

6. $0<\dfrac{3x-1}{2x+5}<2$

$$\frac{3x-1}{2x+5}<2 \quad \wedge \quad \frac{3x-1}{2x+5}>0$$

$$\frac{3x-1}{2x+5}-2<0 \quad \wedge \quad \frac{3x-1}{2x+5}>0\ ; \qquad \frac{3x-1-4x-10}{2x+5}<0 \quad \wedge \quad \frac{3x-1}{2x+5}>0$$

$$\frac{-x-11}{2x+5}<0 \quad \wedge \quad \frac{3x-1}{2x+5}>0\ ; \qquad \frac{x+11}{2x+5}>0 \quad \wedge \quad \frac{3x-1}{2x+5}>0$$

1^0 $x\in(-\infty,-11)\cup\left(-\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

2^0 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

Rešenje nejednačine $0<\dfrac{3x-1}{2x+5}<2$ je presek 1^0 i 2^0, tj.

$$x\in(-\infty,-11)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$$

7. $\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}<2$

$$\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}-2<0\ ; \qquad \frac{x^2-1-2x^2+6x-4}{x^2-3x+2}<0\ ; \qquad \frac{-x^2+6x-5}{x^2-3x+2}<0$$

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}>0\ ;$$

$$x^2-6x+5=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}; \quad x_1=\frac{6+4}{2}=5;\ x_2=\frac{6-4}{2}=1$$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$; $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2; x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

Rešenje: $x \in (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (5,+\infty)$

8. $\frac{x-3}{x-1} > \frac{x-5}{x-3}$

$\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-5}{x-3} > 0$; $\frac{(x-3)^2 - (x-1)(x-5)}{(x-1)(x-3)} > 0$

$\frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 + 5x + x - 5}{(x-1)(x-3)} > 0$; $\frac{4}{(x-1)(x-3)} > 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) > 0$

Rešenje: $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

Zadatak 4. Rešiti jednačine:

1. $log(x-1) + 2log\sqrt{x+2} = 1$;
2. $log_5(x^2 - 11x + 43) = 2$;
3. $log\,x + log(x+3) = 1$;
4. $log\,x - log\frac{1}{x-1} - log\,2 = log(2x+3)$;
5. $log_2(x-1) + log_2(x+2) = 2$.

Rešenje:

1. $log(x-1) + 2log\sqrt{x+2} = 1$

$log(x-1) + log(x+2) = 1$

$log(x-1)(x+2) = 1$

$(x-1)(x+2) = 10 \Rightarrow x^2 + x - 2 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -4$

Međutim, kako je $x - 1 > 0 \wedge x + 2 > 0$, rešenje $x_1 = 3$ ispunjava navedene uslove za rešavanje jednačine, a rešenje $x_2 = -4$ ih ne ispunjava.

2. $log_5(x^2 - 11x + 43) = 2$

$x^2 - 11x + 43 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 11x + 43 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$

$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{11+7}{2} = 9, x_2 = \frac{11-7}{2} = 2$

Kako je $x^2 - 11x + 43$ za $x = 9 \Rightarrow 91 - 99 + 43 > 0$ to je $x = 9$ rešenje jednačine, a za $x = 2 \Rightarrow 4 - 22 + 43 > 0$ to je i $x = 2$ rešenje jednačine.

3. $log\,x + log(x+3) = 1$

uslov: $x > 0 \wedge x + 3 > 0 \Rightarrow x > 0$

$$log\,x(x+3) = 1$$

$$x(x+3) = 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -5$$

Rešenje jednačine je x = 2 jer rešenje x = - 5 ne ispunjava uslov x > 0.

4. $log\,x - log\frac{1}{x-1} - log\,2 = log(2x+3)$

uslov : $x > 0 \wedge x - 1 > 0 \wedge 2x + 3 > 0$ tj.

$$x > 0 \wedge x > -1 \wedge x > -\frac{3}{2} \Rightarrow x > 1$$

$$log\,x + log(x-1) - log(2x+3) = log\,2$$

$$log\frac{x(x-1)}{2x+3} = log\,2 \Rightarrow \frac{x^2 - x}{2x+3} = 2$$

$$x^2 - x = 4x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -1$$

Rešenje je x = 6.

5. $log_2(x-1) + log_2(x+2) = 2$

uslov: $x - 1 > 0 \wedge x + 2 > 0 \Rightarrow x > 1$

$$log_2(x-1)(x+2) = 2$$

$$(x-1)(x+2) = 2^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$$

Rešenje je x = 2.

Zadatak 5. Rešiti sistem jednačina

$$log\,x - log\,y = 2$$
$$log\,y \cdot log\,x = 3$$

Rešenje:

$log\,x - log\,y = 2$

$log\,y \cdot log\,x = 3$

Uslov: $x > 0 \wedge y > 0$

$log\frac{x}{y}=2 \Rightarrow \frac{x}{y}=10^2 \Rightarrow x=100y$

$log\, y \cdot log\, x = 3 \Rightarrow log\, y \cdot log100y = 3 \Rightarrow log\, y(log100+log\, y)=3$

$log\, y(2+log\, y)=3$

$2log\, y + log^2 y - 3 = 0$; $log\, y = t$

$t^2+2t-3=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow t_1=1, t_2=-3$

$log\, y = 1 \Rightarrow y = 10$

$log\, y = -3 \Rightarrow y = 10^{-3} = \frac{1}{1000} \Rightarrow x_1 = 100 \cdot y_1 = 1000; x_2 = 100 \cdot y_2 = \frac{1}{10}$

Rešenje sistema jednačina je:

$(x_1, y_1)=(1000,10)$

$(x_2, y_2)=\left(\frac{1}{10},\frac{1}{1000}\right)$

Zadatak 6. Rešiti jednačine:

1. $log3+\frac{1}{2}log4+log(5x-1)=log(x+2)+log2^3$;
2. $1+log_2(x-1)=log_{x-1}4$;
3. $\sqrt{log_2 x}-log_2 8x+5=0$.

Rešenje:

1. $log3+\frac{1}{2}log4+log(5x-1)=log(x+2)+log2^3$

$log3+log2+log(5x-1)=log(x+2)+3log2$

$log(5x-1)-log(x+2)=2log2-log3$

$log\frac{5x-1}{x+2}=log\frac{4}{3}$

$\frac{5x-1}{x+2}=\frac{4}{3} \Rightarrow 15x-3=4x+8 \Rightarrow 11x=11 \Rightarrow x=1$

Rešenje rednačine je x=1, jer je $5x - 1 > 0$ i $x + 2 > 0$, što je potreban uslov.

2. $1+log_2(x-1)=log_{x-1}4$

uslov : $x - 1 > 0 \wedge x - 1 \neq 1$

$x > 1 \wedge x \neq 2$

$log_2(x-1)+1=\frac{log_2 4}{log_2(x-1)}$ smena : $log_2(x-1)=t \Rightarrow t+1=\frac{2}{t}$

$t^2+t=2$

$t^2+t-2=0 \Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow t_1=1, t_2=-2$

$log_2(x-1)=1 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$

$log_2(x-1)=-2 \Rightarrow x-1=2^{-2} \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$

3. $\sqrt{log_2 x}-log_2 8x+5=0$

uslov : $x>0 \wedge log_2 x>0 \Rightarrow x>1$

$\sqrt{log_2 x}-log_2 8-log_2 x+5=0$

$\sqrt{log_2 x}-3-log_2 x+5=0$

smena : $\sqrt{log_2 x}=t$

$t-t^2+2=0/\cdot(-1)$

$t^2-t-2=0 \Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2} \Rightarrow t_1=2, t_1=-1$

$\sqrt{log_2 x}=2 \Rightarrow log_2 x=4 \Rightarrow x=2^4=16$

$\sqrt{log_2 x}\neq -1$

Zadatak 7. Rešiti nejednačine:

1. $log_3(x^2-5x+6)<0$;
2. $2log\, x> log^2 x$;
3. $log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)\le -3$;
4. $log_2 \dfrac{x-1}{x+1}<1$.

Rešenje:

1. $log_3(x^2-5x+6)<0$

uslov: $x^2-5x+6>0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm 1}{2} \Rightarrow x_1=3, x_2=2$

oblast definisanosti : $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

$log_3(x^2-5x+6)<0 \Rightarrow (x^2-5x+6)<1 \Rightarrow x^2-5x+5<0$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

Rešenje: $x\in\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\cap(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ (=) $x\in\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},2\right)\cup\left(3,\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

2. $2 \log x > \log^2 x$

uslov : $x > 0$

smena : $\log x = t$

$2t > t^2 \Rightarrow 2t - t^2 > 0 \,/ \cdot (-1)$

$t^2 - 2t < 0$

$t(t-2) < 0 \Rightarrow t \in (0,2) \Rightarrow 0 < \log x < 2$

$\log x < 2 \wedge \log x > 0$

$x < 10^2 \wedge x > 10^0$

$1 < x < 100$

3. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 4x + 3\right) \leq -3$

uslov : $x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$

Dakle : 1^0. $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 4x + 3\right) \leq -3$

$x^2 - 4x + 3 \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 8 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -1$

2^0 $x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

Rešenje nejednakosti je presek 1^0 i 2^0

$x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

4. $\log_2 \dfrac{x-1}{x+1} < 1$

uslov : $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$

1^0 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$\log_2 \dfrac{x-1}{x+1} < 1 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} < 2 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} - 2 < 0, \quad \dfrac{x-1-2x-2}{x+1} < 0$

$\dfrac{-x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x+1} > 0$

2^0 $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

Rešenje nejednačine je presek 1^0 i 2^0 $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

Zadatak 8. Rešiti jednačine:

1. $a^x - a^{x-3} - a^3 + 1 = 0$;
2. $3^x \cdot 5^{x-1} = 45$;
3. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;
4. $5^x - 5^{3-x} = 20$;
5. $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$;
6. $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$;
7. $4^{x-\sqrt{x^2-2}} - 3 \cdot 2^{x-\sqrt{x^2-2}-1} = 1$.

Rešenje:

1. $a^x - a^{x-3} - a^3 + 1 = 0 \quad (a \neq 1)$

$a^x - a^x \cdot a^{-3} - a^3 + 1 = 0$

$a^x - \frac{1}{a^3} a^x = a^3 - 1 \;\; ; \quad a^x\left(1 - \frac{1}{a^3}\right) = a^3 - 1$

$a^x \frac{a^3 - 1}{a^3} = a^3 - 1 / : (a^3 - 1) \; ; \quad \frac{a^x}{a^3} = 1 \Rightarrow a^x = a^3 \Rightarrow x = 3$

2. $3^x \cdot 5^{x-1} = 45$

$3^x \cdot 5^x \cdot 5^{-1} = 45 \; ; \quad (3 \cdot 5)^x = 45 \cdot 5 \; ; \quad (15)^x = 3 \cdot 15 \cdot 5$

$(15)^x = 15^2 \Rightarrow x = 2$

3. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

$2^{2\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; uslov: $x \geq 2$; smena : $2^{\sqrt{x-2}} = t$

$t^2 - 10t + 16 = 0 \;\; ; \quad t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow t_1 = 8; t_2 = 2$

$2^{\sqrt{x-2}} = 8 \Rightarrow 2^{\sqrt{x-2}} = 2^3 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow x - 2 = 3^2 \Rightarrow x - 2 = 9 \Rightarrow x = 11$;

$2^{\sqrt{x-2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

4. $5^x - 5^{3-x} = 20$

$5^x - 5^3 \cdot 5^{-x} = 20$; smena : $5^x = t \;\; (t > 0)$

$t - \frac{125}{t} = 20 \; / \cdot t$

$t^2 - 125 = 20t$

$t^2 - 20t - 125 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 500}}{2} = \frac{20 \pm 30}{2} \Rightarrow t_1 = 25, t_2 \neq -5$

$5^x = 25 \Rightarrow x = 2$

5. $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-2}-3^{x-3}$

$$2^x\cdot\frac{1}{2}-2^x\cdot\frac{1}{8}=3^x\cdot\frac{1}{9}-3^x\cdot\frac{1}{27}\quad /:3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\Rightarrow\frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{27}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{27}\cdot\frac{8}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{16}{81}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^4\Rightarrow x=4$$

6. $\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^x=\frac{64}{27}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^x=\frac{64}{27}$$

$$\frac{3^x}{2^x}\cdot\frac{2^{3x}}{3^{2x}}=\frac{64}{27}\Rightarrow\frac{2^{2x}}{3^x}=\frac{64}{27}\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^3\Rightarrow x=3$$

7. $4^{x-\sqrt{x^2-2}}-3\cdot2^{x-\sqrt{x^2-2}-1}=1$

$2^{2\left(x-\sqrt{x^2-2}\right)}-3\cdot2^{x-\sqrt{x^2-2}}\cdot2^{-1}=1$, smena: $2^{x-\sqrt{x^2-2}}=t$ uz uslov $x^2-2\geq0$ i $t>0$

$$t^2-\frac{3}{2}t=1\quad /\cdot2$$

$$2t^2-3t-2=0\Rightarrow t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}\Rightarrow t_1=2,t_2\neq-\frac{1}{2}$$

$$2^{x-\sqrt{x^2-2}}=2\Rightarrow x-\sqrt{x^2-2}=1\Rightarrow x-1=\sqrt{x^2-2}\ ,\quad (x-1)\geq0$$

$$x^2-2x+1=x^2-2\Rightarrow-2x=-3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Zadatak 9. Izračunati vrednost izraza:

(a) $\dfrac{3^{-2}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$; (b) $\left[\left(-\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{-\frac{3}{5}}$.

Rešenje:

(a) $$\frac{3^{-2}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}=\frac{\frac{1}{9}-\left(\frac{4}{3}\right)^{2}}{2-5}=\frac{\frac{1}{9}-\frac{16}{9}}{-3}=\frac{-\frac{15}{9}}{-3}=\frac{15}{9\cdot 3}=\frac{5}{9}$$

(b) $$\left[\left(-\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{-\frac{3}{5}}=\left[\left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-\frac{3}{5}}=$$

$$=\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-\frac{3}{5}}=\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{-\frac{3}{5}}=\left(-\frac{2^{6}}{3^{6}}\right)^{-\frac{3}{5}}=$$

$$=\left(-\frac{3^{6}}{2^{6}}\right)^{\frac{3}{5}}=-\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{18}}=-\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{3}}\ .$$

Zadatak 10. Rešiti sledeće jednačine:

1. $3\sin x-2\cos^{2}x=0$;
2. $\cos^{3}x-\cos x\cos 2x=0$;
3. $3+4\cos x+\cos 2x=0$;
4. $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-ctgx=0$;
5. $\sin 2x+tgx-2=0$;
6. $\sin 5x=\sin 4x$;
7. $\sin 5x=\cos 4x$;
8. $\sin 2x-\sin x=0$;
9. $\sin^{2}x+\cos x=1$;
10. $\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$;
11. $\sin x+\cos^{2}x=\frac{1}{4}$;
12. $\cos x-\cos 2x=1$.

Rešenje:

1. $3\sin x-2\cos^{2}x=0$

   $3\sin x-2\left(1-\sin^{2}x\right)=0$

   $3\sin x-2+2\sin^{2}x=0$ smena: $\sin x=t$

$$2t^2+3t-2=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4} \Rightarrow t_1=\frac{1}{2}, t_2\neq-2$$

$$\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \sin x-\sin\frac{\pi}{6}=0 \Rightarrow 2\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}=0$$

$$\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}=0 \quad \text{ili} \quad \cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}=0$$

$$\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}=0+k\pi \quad \text{ili} \quad \frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{2}+l\pi$$

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi \qquad \text{ili} \qquad x+\frac{\pi}{6}=\pi+2l\pi$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \text{ili} \qquad x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi \qquad (l,k\in Z)$$

2. $\cos^3 x-\cos x\cos 2x=0$

$\cos x(\cos^2 x-\cos 2x)=0 \Rightarrow \cos x=0$ ili $\cos^2 x-\cos 2x=0$

$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\cos^2 x-\cos 2x=0 \Rightarrow \cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$

$\sin^2 x=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=l\pi$

3. $3+4\cos x+\cos 2x=0$

$\cos^2 x-\sin^2 x+4\cos x+3=0$

$2\cos^2 x-1+4\cos x+3=0$

$2\cos^2 x+4\cos x+2=0$

$\cos^2 x+2\cos x+1=0$

$(\cos x+1)^2=0 \Rightarrow \cos x+1=0 \Rightarrow \cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2k\pi$

4. $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-ctgx=0$

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-\frac{\cos x}{\sin x}=0$$

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x-\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=0$$

$$-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=0$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$2x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k\pi\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\quad,\quad k\in Z$$

5. $\sin 2x+tgx-2=0$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1/:\sin^2 x$$

$$1+\frac{1}{tg^2x}=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow\frac{tg^2x+1}{tg^2x}=\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}\Rightarrow\sin x=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1/:\cos^2 x$$

$$1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}\Rightarrow\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2tgx}{1+tg^2x}$$

$$\frac{2tgx}{1+tg^2x}+tgx-2=0/\cdot\left(1+tg^2x\right)$$

$$2tgx+tgx+tg^3x-2-2tg^2x=0$$

$$tg^3x-2tg^2x+3tgx-2=0\quad \text{smena}:\quad tgx=t$$

$$t^3-2t^2+3t-2=0$$

$$(t-1)(t^2-t+2)=0\Rightarrow(t-1)=0\Rightarrow t=1\ \wedge\ t^2-t+2\neq 0$$

$$tgx=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

6. $\sin 5x=\sin 4x$

$$\sin 5x-\sin 4x=0$$

$$2\sin\frac{5x-4x}{2}\cos\frac{5x+4x}{2}=0\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{9x}{2}=0$$

$sin\frac{x}{2}=0$ ili $cos\frac{9x}{2}=0$

$\frac{x}{2}=k\pi$ ili $\frac{9x}{2}=\frac{\pi}{2}+l\pi$

$x=2k\pi$ ili $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2l\pi}{9}$, $k,l\in Z$

7. $sin5x=cos4x$

$$sin5x-cos4x=0\Rightarrow sin(5x)-sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=0$$

$$2\,sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}+4x}{2}cos\frac{5x+\frac{\pi}{2}-4x}{2}=0\Rightarrow 2\,sin\frac{9x-\frac{\pi}{2}}{2}cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=0$$

$sin\frac{9x-\frac{\pi}{2}}{2}=0$ ili $cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=0$

$\frac{9x-\frac{\pi}{2}}{2}=k\pi$ ili $\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{2}+l\pi$

$9x-\frac{\pi}{2}=2k\pi$ ili $x+\frac{\pi}{2}=\pi+2l\pi$

$x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{9}$ ili $x=\frac{\pi}{2}+2l\pi$

8. $sin2x-sin\,x=0$

$$2\,sin\frac{2x-x}{2}cos\frac{2x+x}{2}=0\Rightarrow 2\,sin\frac{x}{2}cos\frac{3x}{2}=0$$

$sin\frac{x}{2}=0$ ili $cos\frac{3x}{2}=0$

$\frac{x}{2}=k\pi$ ili $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+l\pi$

$x=2k\pi$ ili $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2l\pi}{3}$

9. $sin^2x+cos\,x=1$

$1-cos^2x+cos\,x-1=0$

$-cos^2x+cos\,x=0\Rightarrow cos\,x(1-cos\,x)=0$

$cos\,x=0$ ili $1-cos\,x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ili $cos\,x=1\Rightarrow x=2l\pi$

10. $sin\frac{x}{2}+cos\,x=1$

$sin\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}=1 \Rightarrow sin\frac{x}{2}+1-2\,sin^2\frac{x}{2}=1$

$sin\frac{x}{2}-2\,sin^2\frac{x}{2}=0 \Rightarrow sin\frac{x}{2}\left(1-2\,sin\frac{x}{2}\right)=0$

$sin\frac{x}{2}=0$ ili $1-2\,sin\frac{x}{2}=0$

$\frac{x}{2}=k\pi$ ili $sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

$x=2k\pi$ ili $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+2l\pi$ ili $\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$

Rešenje je $x=2k\pi$ ili $x=\frac{\pi}{3}+4l\pi$ ili $x=\frac{5\pi}{3}+4l\pi$

11. $sin\,x+cos^2\,x=\frac{1}{4}$

$sin\,x+1-sin^2\,x=\frac{1}{4}/\cdot(-1)$

$sin^2\,x-sin\,x-\frac{3}{4}=0$

$(sin\,x)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{2}=\frac{1\pm 2}{2} \Rightarrow (sin\,x)_1 \neq \frac{3}{2}, (sin\,x)_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ili $x=\frac{7\pi}{6}+2l\pi$

12. $cos\,x-cos\,2x=1$

$cos\,x-cos^2\,x+sin^2\,x=1$

$cos\,x-cos^2\,x+1-cos^2\,x=1 \Rightarrow -2\,cos^2\,x+cos\,x=0$

$cos\,x(1-2\,cos\,x)=0$

$cos\,x=0$ ili $1-2\,cos\,x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ili $cos\,x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2l\pi$

Zadatak 11. Dokazati jednakosti:

$$\frac{cos^2(270^o-\alpha)}{\frac{1}{sin^2(90^o+\alpha)}-1}+\frac{sin^2(270^o+\alpha)}{\frac{1}{cos^2(90^o-\alpha)}-1}=1$$

2. $\dfrac{\sqrt{1-2\sin x\cos x}}{\sin^2 x-\cos^2 x}+\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

Rešenje:

1. $\dfrac{\cos^2(270^\circ-\alpha)}{\dfrac{1}{\sin^2(90^\circ+\alpha)}-1}+\dfrac{\sin^2(270^\circ+\alpha)}{\dfrac{1}{\cos^2(90^\circ-\alpha)}-1}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1}=$

$=\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

2. $\dfrac{\sqrt{1-2\sin x\cos x}}{\sin^2 x-\cos^2 x}+\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

$\dfrac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}+\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{\sin x-\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}+$

$+\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

Zadatak 12. Izračunati vrednost izraza

$\dfrac{\cos x}{1-tgx}-\dfrac{\sin x}{ctgx-1}$ ako je $\sin x=0{,}6$, $x<\dfrac{\pi}{2}$.

Rešenje:

$\sin x=0{,}6$

$\cos x=\sqrt{1-0{,}6^2}=\sqrt{1-0{,}36}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$

$tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{0{,}6}{0{,}8}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$, $ctgx=\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{\cos x}{1-tgx}-\dfrac{\sin x}{ctgx-1}=\dfrac{0{,}8}{1-\dfrac{3}{4}}-\dfrac{0{,}6}{\dfrac{4}{3}-1}=\dfrac{4\cdot 0{,}8}{4-3}-\dfrac{0{,}6\cdot 3}{4-3}=3{,}2-1{,}8=1{,}4$

Zadatak 13. Dokazati da je

$\dfrac{2\cos 2x+1}{2\cos x+1}=2\cos x-1$

Rešenje:

$$\frac{2\cos 2x+1}{2\cos x+1}=\frac{2\cos^2 x-2\sin^2 x+1}{2\cos x+1}=\frac{2\cos^2 x-2+2\cos^2 x+1}{2\cos x+1}=$$

$$=\frac{4\cos^2 x-1}{2\cos x+1}=\frac{(2\cos x-1)(2\cos x+1)}{2\cos x+1}=2\cos x+1,\quad 2\cos x+1\neq 0$$

Zadatak 14. Dokazati jednakosti:

1. $\left(1+tgx+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+tgx-\frac{1}{\cos x}\right)=2tgx$;

2. $\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

Rešenje:

1. $$\left(1+tgx+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+tgx-\frac{1}{\cos x}\right)=(1+tgx)^2-\frac{1}{\cos^2 x}=1+2tgx+tg^2x-\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=1+2tgx+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=1+2tgx-\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+2tgx-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=2tgx$$

2. $$\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x=$$

$$=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+x-x}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{2x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=$$

$$=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Zadatak 15. Kolika je vrednost izraza

$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ ako je $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}, b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Rešenje:

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}+1\right]^{-1}+\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}+1\right]^{-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}+1\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1\right)^{-1}=\left(\frac{1+2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{-1}+\left(\frac{1+2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)^{-1}=$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{-1} + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)^{-1} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3+6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$$

Zadatak 16. Izračunati vrednost izraza:
$$\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$$

Rešenje:
$$\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$$
$$6-2\sqrt{5} = (a-b\sqrt{5})^2 = a^2 - 2ab\sqrt{5} + 5b^2 \Rightarrow a^2 + 5b^2 = 6 \wedge ab = 1 \Rightarrow a = 1, b = 1$$
$$6-2\sqrt{5} = (1-\sqrt{5})^2$$
$$6+2\sqrt{5} = (1+\sqrt{5})^2$$
$$\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 = \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-1-1-\sqrt{5} = -2$$

Zadatak 17. Rešiti nejednačinu $4^x > 2^{\frac{x+1}{x}}$.

Rešenje:
$$4^x > 2^{\frac{x+1}{x}}$$
$$2^{2x} > 2^{1+\frac{1}{x}} \Rightarrow 2x > 1+\frac{1}{x}$$
$$2x-1-\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2-x-1}{x} > 0 \Rightarrow (2x^2\text{-}x\text{-}1 > 0 \wedge x > 0) \vee (2x^2\text{-}x\text{-}1 < 0 \wedge x < 0)$$
$$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$$
Rešenje nejednačine je $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, +\infty)$

Zadatak 18. Izračunati vrednost izraza:

1. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}+5\right)^{-\frac{1}{2}}$;

2. $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$.

Rešenje:

1. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}+5\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}+\frac{3\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-4}+\frac{15\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3}\right)\left(\sqrt{3+5}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=\left(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-6+\frac{15\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}\right)\left(\sqrt{3}+5\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(-2\sqrt{3}-5+\frac{15+5\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}+5\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$=\frac{-4\sqrt{3}-10+15+5\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+5\right)^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+5}}{2}$

2. $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}\right)^2=$

$=\left(3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=4\cdot 2=8$

Zadatak 19. Dokazati da svaka prava koja prolazi kroz sredinu srednje linije trapeza i seče paralelne stranice deli trapez na dva dela jednakih površina.

Rešenje:

Površina trapeza čije su osnovice a i b i visina h jednaka je $\frac{a+b}{2}h$. Kako je $\frac{a+b}{2}$ dužina m srednje linije trapeza, površina je $m\cdot h$. Prava koja prolazi kroz sredinu srednje linije trapeza i seče paralelne stranice deli trapez na dva trapeza sa jednakim visinama i jednakom srednjim linijama. Prema tome, ovi trapezi imaju jednake površine.

Zadatak 20. Dat je trougao i jedna prava *L* koja ne seče trougao. Dokazati da je zbir normala spuštenih iz trouglovih temena na pravu *L* jednaka zbiru normala spuštenih na istu pravu iz sredina trouglovih stranica.

Rešenje:

Označimo sa M_1, M_2, M_3 dužine normala koje su spuštene na pravu L redom iz temena trougla A, B, C. Neka su zatim m_1, m_2, m_3 dužine normala spuštenih redom iz sredina stranica AB, BC i CA. Sabiranjem jednakosti $\frac{M_1+M_2}{2}=m_1$, $\frac{M_2+M_3}{2}=m_2$, $\frac{M_3+M_1}{2}=m_3$ dobijamo $M_1+M_2+M_3=m_1+m_2+m_3$ čime je dokaz završen.

Zadatak 21. Dat je pravougli trougao čije su katete a i b. Prav ugao tog trougla podeljen je polupravama q i p na tri jednaka dela. Izračunati dužine onih polupravih p i q koje se nalaze u datom trouglu.

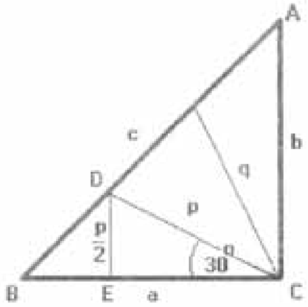
Rešenje:

Iz sličnosti trouglova ABC i DBE izlazi jednakost

$$\frac{\frac{p}{2}}{b}=\frac{a-\frac{p\sqrt{3}}{2}}{a}\Rightarrow p=\frac{2ab}{a+b\sqrt{3}}$$

Sličnim postupkom se dobija

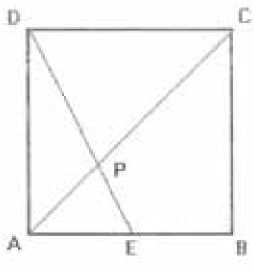
$$q=\frac{2ab}{b+a\sqrt{3}}$$



Zadatak 22. Neka je E sredina stranice AB kvadrata ABCD. Odrediti u kojoj razmeri duž DE deli dijagonalu AC.

Rešenje:

Neka je P presečna tačka duži DE i dijagonale AC. Trouglovi AEP i CDP su slični, odakle izlazi da je
AP : CP = AE : CD = 1 : 2,
jer je E sredina stranice kvadrata.



Zadatak 23. Oko trougla ABC opisan je krug i u temenu A povučena je tangenta kruga. Prava paralelna sa ovom tangentom seče prave AB i AC u tačkama D i E. Dokazati da tačke B, C, D i E leže na jednom krugu.

Rešenje:

Treba dokazati da je četvorougao BCED tetivan, tj. da važi jednakost

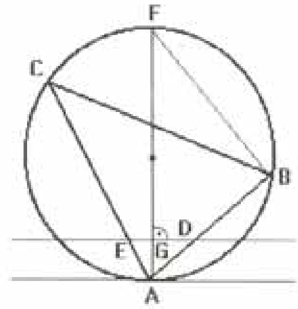
$\sphericalangle DCB + \sphericalangle CDE = \sphericalangle EDB + \sphericalangle BCE$

tj. da je $\sphericalangle EDB + \sphericalangle BCE = \pi$.

Neka je $\sphericalangle DBC = \beta$ i $\sphericalangle BCE = \gamma$. Sa slike se vidi da je $\sphericalangle BFA = \gamma$ jer su to periferijski uglovi nad istim lukom. Četvorougao GDBF ima dva prava ugla kod temena G i B pa je

$\sphericalangle EDB = \pi - \gamma$ tj. $\sphericalangle EDB + \gamma = \pi$,

čime je dokaz završen.



Zadatak 24. Dat je paralelogram ABCD. Na pravama AB i BC izabrane su redom tačke H i K tako da su trouglovi KAB i HCB jednakokraki (KA = AB, HC = CB). Dokazati da je trougao KDH takođe jednakokrak.

Rešenje:

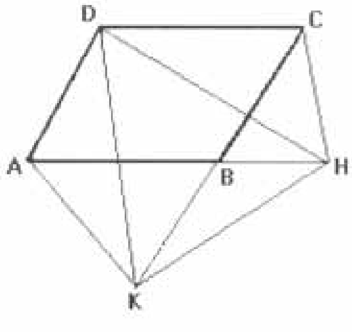
Kako je AK=AB=CD, CH=BC=AD i kako je

$\sphericalangle ABK = \sphericalangle AKB$ (jednakokraki trougao),

$\sphericalangle ABK = \sphericalangle HBC$ (unakrsni),

$\sphericalangle HBC = \sphericalangle BHC$ (jednakokraki),

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ to je $\sphericalangle KAB = \sphericalangle HCB$ tj. važi AK = CD , CH = AD, $\sphericalangle KAD = \sphericalangle HCD$ pa je $\Delta\ KAD \cong \Delta\ DCH$. Iz ove podudarnosti sledi DK = DH, što znači da je trougao KDH jednakokraki, što je i trebalo dokazati.



Zadatak 25. Tačka S koja leži u unutrašnjosti pravougaonika ABCD spojena je dužima sa njegovim temenima. Dokazati da je zbir površina trouglova ABS i CDS jednak zbiru površina trouglova BCS i DAS.

Rešenje:
Neka su stranice pravougaonika AB = CD = a, BC = DA = b. Zbir površina trouglova ABS i CDS iznosi

$S_1 + S_2 = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{a}{2}(h_1 + h_2)$, gde su h_1 i h_2 visine ovih trouglova spuštene iz S.

Kako je $h_1 + h_2 = b$ dobijamo $S_1 + S_2 = \frac{ab}{2}$. Prema tome, zbir trouglova BSC i DAS je takođe $\frac{ab}{2}$, jer je površina pravougaonika ab.

Zadatak 26. Dat je trapez ABCD sa paralelnim stranicama AB i CD. Ako je M sredina stranice AD, dokazati da je površina trougla MBC jednaka površini trapeza ABCD.

Rešenje:
Ako je h visina trapeza, tada trouglovi ABM i CDM imaju jednake visine koje iznose $\frac{h}{2}$. Neka je AB = a i CD = b. Zbir površina ovih trouglova je:

$S = \frac{1}{2}a\frac{h}{2} + \frac{1}{2}b\frac{h}{2} = \frac{1}{4}(a+b)h$, a to je polovina površine trapeza.

Zadatak 27. Ako se u trouglu ABC visine 20 cm povuče duž DE paralelno sa osnovicom AB, dobija se trougao DEC čije su stranice: DE = 14 cm, EC = 13 cm, CD = 15 cm. Odrediti stranice i visinu trapeza ABED.

Rešenje:
Primenom Heronovog obrazca nalazimo površinu trougla DEC. Ona iznosi $P' = 84\ cm^2$. Na osnovu toga izračunavamo visinu h' ovog trougla spuštenu iz C na DE, tj. $h' = 12$ cm. Kako su trouglovi ABC i DEC slični, pri čemu je poznata visina h trougla ABC iz proporcije AB : DE = BC : EC = AC : DC = $h : h'$ = 20 : 12 dobijamo $AB = \frac{70}{3}cm$, $BC = \frac{65}{3}cm$, $AC = 25cm$. Pomoću ovih elemenata jednostavno se dobiju stranice i visina trapeza ABED.

Zadatak 28. Dat je jednakokraki pravougli trougao čija je hipotenuza jednaka 1. Nad njegovom katetom, kao nad hipotenuzom, konstruisan je drugi jednakokraki pravougli trougao; zatim je nad katetom ovog trougla, kao nad hipotenuzom konstruisan treći jednakokraki pravougli trougao itd. Izračunati zbir površina svih tako konstruisanih trouglova.

Rešenje:
Površine konstruisanih trouglova obrazuju geometrijsku progresiju čiji je količnik $\frac{1}{2}$. Površina prvog trougla je $\frac{1}{4}$ pa je zbir S svih površina

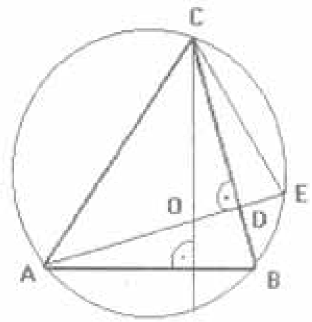
$$S=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Napomena: Kateta jednog trougla je $\sqrt{2}$ puta manja od katete prethodnog trougla, što znači da katete konstruisanih trouglova obrazuju geometrijsku progresiju sa količnikom $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Kako je kateta datog trougla $\frac{1}{\sqrt{2}}$, zbir S svih kateta iznosi

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}.$$

Zadatak 29. Dokazati da tačke simetrične ortocentru trougla prema stranicama trougla pripadaju krugu opisanom oko trougla.

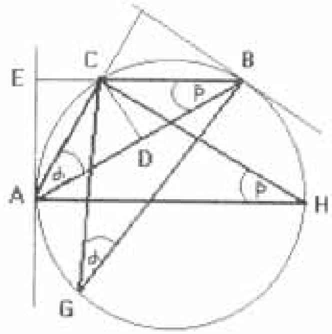
Rešenje:
Dovoljno je dokazati da ova osobina važi samo za jednu tačku. Posmatrajmo trougao ABC oko koga je opisan krug. Uglovi ABC i DEC jednaki su kao uglovi nad istim lukom AC. Sa druge strane je ∢ COD=∢ ABC jer su to uglovi sa normalnim kracima. Na osnovu toga zaključujemo da pravougli trouglovi ODC i EDC imaju iste uglove. Kako je duž CD njihova zajednička kateta, ovi trouglovi su podudarni pa je OD = DE. Prema tome, tačka E je simetrična tački O u odnosu na stranu BC.



Zadatak 30. Na kružnici su date tačke A i B i tačka C na manjem od lukova određenih tačkama A i B. Iz tačke C spuštene su normale na tetivu AB i na tangente kružnice povučene u tačkama A i B. Neka su D, E i F tačke preseka tih normala sa tetivom AB i tangentama. Dokazati da je $CD^2 = CE \cdot CF$.

Rešenje:

Upišimo u kružnicu pravougle trouglove BCG i CAH, s tim što su AH i GB prečnici. Ugao CAB jednak je uglu CGB jer su to uglovi nad istim lukom. Uglovi CGB i CBF jednaki su jer imaju normalne krake. Prema tome, < CBF = < CAD što znači da su pravougli trouglovi CBF i CAD slični. Na isti način se dokazuje sličnost trouglova EAC i DBC. Na osnovu ove sličnosti nalazimo $\frac{CF}{CB}=\frac{CD}{CA}$ i $\frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$ odakle je $CF \cdot CE = CD^2$, čime je dokaz završen.



Zadatak 31. U kvadratu ABCD konstruisan je jednakokraki trougao PAB sa uglovima na osnovici AB jednakim 15^0. Dokazati da su tačke P, C i D temena jednakostraničnog trougla.

Rešenje:

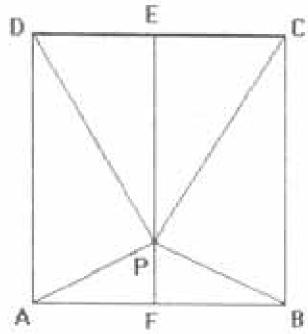
Trougao PCD je jednakostraničan ako je njegova visina $PE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, gde je sa a označena stranica kvadrata. Iz trougla FBP nalazimo:

$$FP=\frac{a}{2}tg15^\circ=\frac{a}{2}tg(45^\circ-30^\circ)=\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})=a-\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

odakle je

$$PE=a-FP=a-\left(a-\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Ovim je dokaz završen.



Zadatak 32. Za koje vrednosti x funkcija $f(x) = x^2 - 2ax + a - 1$ ima minimalnu vrednost i kolika je ta minimalna vrednost? Ispitati znak minimalne vrednosti i dati rezultatu geometrijsko značenje.

Rešenje:

Funkcija $f(x)$ ima minimalnu vrednost za $x = a$. Ova minimalna vrednost iznosi $f(a) = - a^2 + a - 1$. Diskriminanta ovog kvadratnog trinoma je negativna, što znači da je minimalna vrednost funkcije $f(x)$ negativna za sve vrednosti a. To znači da funkcija $f(x)$, koja je takođe kvadratni trinom, ima realne i različite korene za svako a.

Zadatak 33. Ako su x_1 i x_2 koreni jednačine $x^2 + px + q = 0$, odrediti p i q tako da $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$ budu koreni jednačine $x^2 - p^2x + pq = 0$.

Rešenje:
Ako su x_1 i x_2 koreni jednačine $x^2 + px + q = 0$ tada je $x_1 + 1 + x_2 + 1 = -p + 2$, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = q - p + 1$. Prema tome, $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$ su koreni jednačine $x^2 + (p - 2)x + q - p + 1 = 0$. Kako su $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$ istovremeno koreni jednačine $x^2 - p^2x + pq = 0$, dobijamo sistem jednačina $p - 2 = -p^2$, $q - p + 1 = pq$.
Iz prve jednačine nalazimo $p = 1$ ili $p = -2$. Za $p = 1$ druga jednačina se svodi na identitet $q = q$, što znači da q može biti proizvoljno. Za $p = -2$ imamo $q = -1$. Dakle, rešenje zadatka glasi: $p = 1$, q proizvoljno ili $p = -2$, $q = -1$.

Zadatak 34. Odrediti vrednost parametra m tako da koreni x_1 i x_2 jednačine $x^2 - 3mx + m^2 = 0$ zadovoljavaju uslov $x_1^2 + x_2^2 = 1,75$. Odrediti korene jednačine u tom slučaju.

Rešenje:
Kako je $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q = 9m^2 - 2m^2 = 1,75$ dobijamo $m^2 = 0,25$ tj. $m = \pm 0,5$. Zamenom m u datoj kvadratnoj jednačini dobijamo dva para korena $x_{1,2} = \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$ i $x_{1,2} = \frac{1}{4}\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)$.

Zadatak 35. Odrediti vrednost parametra m tako da koreni jednačine
$x^2 + (m - 1)x + m^2 + 4m - 12 = 0$
zadovoljavaju uslov $x_1^2 + x_2^2 = 34$. Rešiti jednačinu za dobijenu vrednost parametra m.

Rešenje:
Kako je $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q = 34$, gde je $p = m - 1$ i $q = m^2 + 4m - 12$ iz ove jednačine nalazimo dva rešenja $m_1 = -1$ i $m_2 = -9$. Za $m = m_1$ dobijamo kvadratnu jednačinu $x^2 - 2x - 15 = 0$, iz koje je $x_1 = 5$ i $x_2 = -3$. Za $m = m_2$ dobijamo kvadratnu jednačinu $x^2 - 10x + 33 = 0$ čiji su koreni kompleksni tj. $x_1 = 5 + 2\sqrt{2}i$ i $x_2 = 5 - 2\sqrt{2}i$.

Zadatak 36. Dat je kvadratni trinom $k(x) = (p - 2)x^2 - 2px + 2p - 3$, gde je p realan parametar.

Rešenje:

1^0 Nejednakost $k(x) < 0$ ispunjena je za svako x ako je koeficijent uz x^2 manji od nule i ako $k(x)$ nema realnih nula, tj. ako je diskriminanta kvadratne jednačine $k(x) = 0$ manja od nule. Prema tome, iz sistema nejednačina

$p - 2 < 0$, $p^2 - (p - 2)(2p - 3) < 0$ dobijamo $p < 1$.

2^0 Iz jednačine $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$ tj. $x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1x_2)^2$ dobijamo

$\left(\frac{2p}{p-2}\right)^2 - 2\frac{2p-3}{p-2} = 2\left(\frac{2p-3}{p-2}\right)^2$.

Svođenjem ove jednačine nalazimo $4p^2 - 19p + 15 = 0 \Rightarrow p_1 = 1$, $p_2 = \frac{15}{4}$.

Zaista, za $p = p_1 = 1$ jednačina $- x^2 - 2x - 1 = 0$ ima korene $x_1 = x_2 = -1$ za koje je $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$. Za $p = p_2 = \frac{15}{4}$ jednačina $7x^2 - 30x + 8 = 0$ ima korene $x_{1,2} = \frac{(15 \pm 3\sqrt{11})}{7}$ za koje je takođe $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$.

Zadatak 37. 1^0 Ako su x_1 i x_2 nule trinoma $k(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, izraziti $(1 + x_1) / (1 - x_1) + (1 + x_2) / (1 - x_2)$ pomoću a, b i c.

2^0 Dokazati da iz činjenice da je trinom $k(x)$ pozitivan ako i samo ako je $1 < x < 3$, sleduje $a < 0$.

Odrediti za koje je vrednosti x u tom slučaju ispunjena nejednakost $ax^2 - bx + c > 0$.

Rešenje:

1^0 Kako je $A = \frac{1+x_1}{1-x_1} + \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{2(1-x_1x_2)}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2}$, primenom Vijetovih pravila imamo $A = \frac{2(a-c)}{a+b+c}$.

2^0 Trinom $k(x)$ ima nule $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Prema tome, on se može napisati u obliku $k(x) = a(x - 1)(x - 3) = a(x^2 - 4x + 3)$. Zaista, ako je $a < 0$, ovaj trinom je pozitivan za $1 < x < 3$. Jednostavno se dokazuje da važi i obrnuto. Nejednakost $ax^2 - bx + c > 0$ svodi se na $a(x^2 + 4x + 3) > 0$. Kako je $a < 0$, ova nejednakost je ispunjena za $-3 < x < -1$.

Zadatak 38. Data je funkcija $f(x) = x^2 + (k + 2)x + 2k$, k - realni parametar.

a) Dokazati da su za svako k koreni jednačine $f(x) = 0$ realni.

b) Odrediti k tako da jednačina $f(x - k) - 2x = 0$ ima rešenja $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Za tako određenu vrednost k naći minimum funkcije $f(x - k) - 2x$.

Rešenje:

a) Diskriminanta kvadratnog trinoma $D = (k + 2)^2 - 8k = (k - 2)^2$ ne može biti negativna, pa su koreni jednačine $f(x) = 0$ realni.

b) Jednačina $f(x - k) - 2x = 0$ svodi se na kvadratnu jednačinu $x^2 - kx = 0$. Za $k = 7$ koreni ove jednačine su $x_1 = 0$ i $x_2 = 7$. U tom slučaju kvadratni trinom $x^2 - 7x$ ima minimum $\frac{-49}{4}$ za $x = \frac{7}{2}$.

Zadatak 39. Neka je $f(x) = x^2 + (3k + 1)x + 5k$ i $g(x) = (k + 1)x^2 + 4kx + 7k$.

1^0 Naći sve vrednosti realnog parametra k za koje je

$$f(x) > g(x) \quad \text{za svako } x$$

2^0 Naći najmanju vrednost funkcije $F(x) = 2f(k - 1) + g(-1)$.

Rešenje:

1^0 Nejednakost $f(x) > g(x)$ svodi se na $kx^2 + (k - 1)x + 2k < 0$. Da bi ona bila ispunjena za svako x, treba da važe nejednakosti $k < 0$ i $(k - 1)^2 - 8k^2 < 0$, odakle je $k < \frac{-1-2\sqrt{2}}{7}$.

2^0 Imamo

$$F(x) = 2\left((k-1)^2 + (3k+1)(k-1) + 5k\right) + (k + 1 - 4k + 7k) = 8k^2 + 6k + 1 = 8\left(k + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

minimum $F_{min} = -\frac{1}{8}$ dobija se za $k = -\frac{3}{8}$.

Zadatak 40. Za koju je vrednost realnog parametra a zbir kubova jednačine $6x^2 + 6(a - 1)x - 5a + 2a^2 = 0$ najveći?

Rešenje:

Kako je $S = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -p(p^2 - 3q)$ gde su $p = a - 1$, $q = \frac{\left(-5a + 2a^2\right)}{6}$ imamo $S = -\frac{1}{2}\left(a^2 + a - 2\right) = \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ za $a = -\frac{1}{2}$ dobijamo $S_{max} = \frac{9}{8}$.

Zadatak 41. Neka je $f(x) = x^2 + (a - 2)x + a + 5$. Odrediti realan parametar a tako da jednačina $f(x) = 0$ ima realne korene x_1 i x_2 koji zadovoljavaju uslov $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2$. Za tako nađeno a odrediti x za koje je $0 \leq f(x) \leq 3$.

Rešenje:
Primenom Vijetovih formula dobijamo $x_1 + x_2 = 2 - a$ i $x_1x_2 = a + 5$. Da bi jednačina $f(x) = 0$ imala realne korene x_1 i x_2 potrebno je da diskriminanta bude veća od nule tj. $D = b^2 - 4ac > 0$ odnosno
$(a - 2)^2 - 4(a + 5) = a^2 - 16 = (a - 4)(a + 4) \geq 0$.
Ako koreni x_1 i x_2 zadovoljavaju jednačinu
$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2$ sređivanjem jednačine dobijamo
$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{x_2 + x_1 + 2(x_1x_2)}{x_1x_2}$ odnosno $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 0$ tj. $(2 - a)^2 - (2 - a) - 4(a + 5) = 0$. Kvadratna jednačina $a^2 - 7a - 18 = 0$ ima dva rešenja $a = 9$ i $a = -2$, ali da bi bilo $D > 0$ rešenje mora biti samo $a = 9$.

Zadatak 42. Data je funkcija $y = x^2 + px + q$. Odrediti vrednost parametara p i q tako da:
a) grafik funkcije seče apcisu osu u tački A(-1,0) a ordinatu osu u tačku B(0,3)
b) grafik funkcije dodiruje apcisu osu u tački T(4,0)
c) funkcija ima minimum - 4 za $x = 1$.

Rešenje:
a) $p = 4$, $q = 3$

b) Datu funkciju napisati u kanoničnom obliku tj. $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ iz pretpostavke izlazi sistem $q - \frac{p^2}{4} = 0$ i $4p + q = 16 = 0$.

c) Iz pretpostavke sledi sistem jednačina $\frac{p}{2} = 1$ i $q - \frac{p^2}{4} = -4$ dakle $p = 2$, $q = -3$.

Zadatak 43. Data je funkcija $y = ax^2 - 2x - 5$. Odrediti parametar a tako da funkcija postiže maksimalnu vrednost -2. Za nađenu vrednost ispitati tok i skicirati grafik funkcije.

Rešenje:

Iz obrasca $D=\frac{4ac-b^2}{4a}$ sledi $\frac{4a(-5)-(-2)^2}{4a}=-2$, $a=-\frac{1}{3}$ a funkcija $y=-\frac{1}{3}x^2-2x-5=-\frac{1}{3}(x+3)^2-2$.

Zadatak 44. Data je funkcija $f(x) = x^2 - x + 1$. Ispitati $f(0), f(1), f(-1), f(a+1)$ i $f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Rešenje:

$f(0) = 1,\quad f(1) = 1,\quad f(-1) = 3,\quad f(a+1) = (a+1)^2 - (a+1) + 1 = a^2 + a + 1$

$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2-a+1}{a^2}$

Zadatak 45. Odrediti parametar m tako da važi relacija

a) $x^2 - mx - m^2 - 5 = 0$, relacija $\frac{4}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{2}$

b) $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$, relacija $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{10}{3}$

ako su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

Rešenje:

a) Iz jednakosti primenom Vijetovih formula $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ i $x_1x_2=\frac{c}{a}$ dobijamo $\frac{4}{x_1x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}-\frac{1}{2}$ odnosno $\frac{4}{-(m^2+5)}=\frac{m}{-(m^2+5)}-\frac{1}{2}$. Iz ovog izraza sledi jednačina $m^2 + 2m - 3 = 0$ čija su rešenja $m_1 = 1$ i $m_2 = -3$.

b) $\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{10}{3}$

$3\left(\frac{2m}{m-2}\right)^2-6\frac{2m-3}{m-2}-10\left(\frac{2m-3}{m-2}\right)^2=0$ sređivanjem jednakosti dobijamo kvadratnu jednačinu $40m^2 - 162m + 126 = 0$ čija su rešenja $m_1=3$ i $m_2=\frac{21}{20}$.

Zadatak 46. U jednačini $kx^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ odrediti parametar k tako da:

a) $x_1^2+x_2^2=3$ b) $x_1x_2^2+x_1^2x_2=4$ c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5$

Rešenje:

Iz $x_1+x_2=\frac{2k+1}{k}$ i $x_1x_2=\frac{1}{k}$ dobijamo:

a) $x_1^2+x_2^2=3$, $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3$, $\left(\frac{2k+1}{k}\right)^2-\frac{2}{k}=3$

$(2k+1)^2-2k-3k^2=0$, $4k^2+4k+1-2k-3k^2=0$

$k^2+2k+1=0$, $(k+1)^2=0$, $k_{1,2}=-1$.

b) $x_1x_2^2+x_1^2x_2=4$, $x_1x_2(x_2+x_1)=4$, $\frac{1}{k}\frac{2k+1}{k}=4$, $2k+1=4k^2$,

$4k^2-2k-1=0$, $k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5$, $\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=5$, $x_1+x_2=5x_1x_2$, $\frac{2k=1}{k}=\frac{5}{k}$, $k=2$.

Zadatak 47. Ako brojevi a^2, b^2, c^2 obrazuju aritmetičku progresiju, ispitati da li brojevi $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ takođe obrazuju aritmetičku progresiju.

Rešenje:

Iz uslova da a^2, b^2, c^2 obrazuju aritmetičku progresiju sledi $b^2=\frac{\left(a^2+c^2\right)}{2}$.

Uslov da druga tri broja obrazuju aritmetičku progresiju daje

$$\frac{1}{c+a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{1}{2}\frac{a+c+2b}{b^2+(a+c)b+ac}=\frac{1}{2}\frac{a+c+2b}{\frac{a^2+c^2}{2}+(a+c)b+ac}=$$

$$=\frac{a+c+2b}{(a+c)(a+c+2b)}=\frac{1}{a+c}$$ gde smo koristili uslov $b^2=\frac{\left(a^2+c^2\right)}{2}$. Ovim je dokaz završen.

Zadatak 48. Ako je $a_1>0$, $a_2>0$, ... , $a_n>0$ i ako a_1, a_2, ... , a_n obrazuju aritmetičku progresiju, dokazati identitet

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Rešenje:
Ako racionališemo razlomke na levoj strani identiteta dobijamo:
$\dfrac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\dfrac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\ldots+\dfrac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}=\dfrac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}{d}$ gde je d diferencija aritmetičke progresije. Ako se u dobijenom razlomku racionališe brojilac i ako se koristi relacija $a_n = a_1 + (n - 1)d$, dobija se $\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}$ čime je dokaz završen.

Zadatak 49. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ članovi aritmetičke progresije dokazati da je $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$.

Rešenje:
Zadatak se može rešiti na dva načina.
Rešenje 1. Primenom metoda matematičke indukcije:
- za $n = 2$ jednakost važi.
- neka je $S_n=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ i pretpostavimo da je jednakost tačna, tj. da je $S_n=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$. Ako levoj i desnoj strani dodamo $\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$ dobijamo $S_{n+1}=S_n+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{na_{n+1}-a_{n+1}+a_1}{a_1a_na_{n+1}}$ ... (*).
  Kako je $a_{n+1} = a_n + d$ i $a_n = a_1 + (n-1)d$ jednakost (*) postaje $S_{n+1}=\dfrac{n}{a_1a_{n+1}}$ što znači da je jednakost tačna ako umesto n uvedemo $n + 1$. Ovim je induktivni dokaz završen.

Rešenje 2. Kako je:
$$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\frac{d}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
za zbir S_n možemo pisati
$$S_n=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=$$
$$=\frac{1}{d}\frac{(n-1)d}{a_1a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Zadatak 50. Data je funkcija $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

1^0 Dokazati da razlike $f(x+1) - f(x)$, $f(x+2) - f(x+1)$, $f(x+3) - f(x+2)$, ... obrazuju aritmetičku progresiju.

2^0 Koju vrednost treba dati promenljivoj x da bi zbir pet prvih članova te progresije bio 60?

3^0 Koliko članova najmanje treba sabrati za nađeno x da bi zbir bio veći od 120?

Rešenje:

1^0 Kako je :
$$\begin{aligned} a_0 &= f(x+1) - f(x) = 2x - 2 \\ a_1 &= f(x+2) - f(x+1) = 2x \\ &\vdots \\ a_k &= f(x+k+1) - f(x+k) = 2x + 2k - 2 \end{aligned}$$

zaključujemo da dati niz zaista obrazuje aritmetičku progresiju čija je razlika (diferencija) $d = 2$.

2^0 Zbir prvih pet članova iznosi $S_5 = f(x+5) - f(x) = 10x + 10$. Iz jednakosti $10x + 10 = 60$ sledi da je $x = 5$.

3^0 Za $x=5$ dobijamo $a_0 = 8$ i $a_n = 8 + 2n$ te je $S_n = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n) = (n+1)(n+8)$.

Nejednakost $S_n > 120$ ispunjena je za $n > 8$, što znači da treba sabrati najmanje 9 članova progresije pa da zbir bude veći od 120.

Zadatak 51. Odrediti prirodan broj n ako se zna da je zbir $1 + 2 + 3 + ... + n$ trocifren broj čije su sve cifre jednake.

Rešenje:

Zbir n prirodnih brojeva iznosi $\frac{n}{2}(n+1)$. Kako je ovaj zbir jednak trocifrenom broju sa istim ciframa, dobijamo

$\frac{n}{2}(n+1) = 100m + 10m + m = 111m = 3 \cdot 37 \cdot m$, tj. $n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot m$ pri čemu $m \in \{1,2,3,...9\}$. Na levoj strani ove jednakosti je proizvod dva uzastopna prirodna broja, pa mora biti i desna strana proizvod dva uzastopna prirodna broja, odakle zaključujemo da je $m = 6$ jer je tada $2 \cdot 3 \cdot m = 36$. Prema tome, $n = 36$. Zaista, zbir prvih 36 prirodnih brojeva iznosi 666.

Zadatak 52. Tri broja obrazuju geometrijsku progresiju. Ako se drugi član poveća za 8, progresija prelazi u aritmetičku progresiju. Ako se sada poslednji član ove aritmetičke progresije poveća za 64, dobija se opet geometrijska progresija. Odrediti pomenuta tri broja.

Rešenje:

Neka su ovi brojevi $a,\ aq,\ aq^2$. Prema uskovu zadatka brojevi $a,\ aq,\ aq^2$ obrazuju aritmetičku progresiju, pa je $\frac{a+aq^2}{2}=aq+8$ ... (*), dok brojevi a, $aq+8$, aq^2+64 obrazuju geometrijsku progresiju, tj. $(aq+8)^2 = a(aq^2+64)$ ... (**). Iz jednačine (**) nalazimo da je $q=4-\frac{4}{a}$. Zamenom q u jednačinu (*) dobijamo $9a^2 - 40a + 16 = 0 \Rightarrow a = 4$ i $a=\frac{4}{9}$, pa su odgovarajuće vrednosti q jednake redom 3 i -5. Na osnovu toga traženi brojevi su: $4,\ 12,\ 36$ i $\frac{4}{9},\frac{-20}{9},\frac{100}{9}$.

Zadatak 53. Prvi član aritmetičke progresije je $a_1=-\frac{5}{6}$, a zbir $S_n = 36$. Odrediti broj članova progresije ako je zbir drugog i petog člana jednak nuli. Napisati prvih šest članova progresije.

Rešenje:

Kako je $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ i $a_n= a_1+(n-1)d$ iz uslova $a_2 + a_5 = 0$ dobija se da je diferencija ove progresije $d=\frac{1}{3}$ i broj sabranih članova je $n = 18$. Prvih šest članova su : $-\frac{5}{6},-\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}$.

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= -\frac{5}{6}+(2-1)d \\ a_5 &= -\frac{5}{6}+(5-1)d \end{aligned}\right. \Rightarrow d=\frac{1}{3}$$

Iz $36=\frac{n}{2}\left[-\frac{5}{6}+\left(-\frac{5}{6}\right)+(n-1)\cdot\frac{1}{3}\right]$ dobijamo $n^2 - 6n -216 = 0$ tj. $n = 18$.

Zadatak 54. Zbir prva četiri člana aritmetičke progresije je 1, a zbir sledeća četiri člana je 25. Odrediti zbir prvih 37 članova progresije.

Rešenje:

Iz $S_4 = \frac{4}{2}(a_1 + a_4) \Rightarrow 1 = 2(a_1 + a_1 + 3d)$ tj. $2a_1 + 3d = \frac{1}{2}$ ... (*)

Iz $S_8 - S_4 = 25 \Rightarrow 25 = 4(a_1 + a_1 + 7d)$ tj. $2a_1 + 7d = \frac{13}{2}$ ... (**)

Rešavanjem jednačina (*) i (**) dobijamo $a_1 = -2, d = \frac{3}{2}, S_{37} = 925$.

Zadatak 55. Dokazati da su brojevi $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$ tri uzastopna člana opadajuće geometrijske progresije. Ako su ta tri broja u isto vreme prva tri člana beskonačne progresije naći njenu sumu.

Rešenje:

Kako je $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)^2} = \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2$ zaključujemo da su dati brojevi zaista članovi jedne geometrijske progresije, a iz $\frac{1}{2-\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ zaključujemo da je ova progresija opadajuća. Zbir S beskonačne progresije čija su ovo tri člana je $S = 4 + 3\sqrt{2}$ $\left(S = \frac{a_1}{1-q}\right)$.

Zadatak 56. Ako pozitivni brojevi a, b i c obrazuju aritmetičku progresiju, dokazati da brojevi $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, takođe obrazuju aritmetičku progresiju.

Rešenje:

Ako a, b, c obrazuju aritmetičku progresiju, tada je $b - a = c - b = d$. Na osnovu toga je $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{d}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}, \frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}$ pa je $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{d} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d} = 2\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ odakle zaključujemo da dati brojevi zaista obrazuju aritmetičku progresiju.

Zadatak 57. Tri broja čiji je zbir 19 čine geometrijsku progresiju. Ako se poslednji broj smanji za jedan dobija se aritmetička progresija. Koji su to brojevi?

Rešenje:
Ako je $a + b + c = 19$ i ako $a, b, c - 1$ obrazuju aritmetičku progresiju onda je $b - a = c - b - 1 = d$. Kako je još i $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$ (a, b, c obrazuju geometrijsku progresiju) to se iz sistema:

$a + b + c = 19$

$2b - a - c = -1$

$b^2 = c \cdot a$

dobija: iz prve dve jednačine vrednost $b = 6$. Ako sad to zamenimo u treću jednačinu dobijamo $36 = c \cdot a$. Iz $a + c = 13$ i $a \cdot c = 36$ dobijamo smenom $a = 13 - c$ kvadratnu jednačinu $c^2 - 13c + 36 = 0$ čija su rešenja 4 i 9 pa su traženi brojevi $4, 6, 9$.

Zadatak 58. Odrediti tri broja a_1, a_2, a_3 koji čine geometrijsku progresiju, ako brojevi $a_1, a_2, a_3 - 3$ čine aritmetičku progresiju i njihov broj je 21.

Rešenje:

$a_1 + a_2 + a_3 = 21$

$$\frac{a_1 + a_3 - 3}{2} = a_2$$

$a_2^2 = a_1 a_3$

$a_2 = 6, \quad a_1 + a_3 = 15, \quad a_1 a_3 = 36$

Rešavanjem sistema dobijamo kvadratnu jednačinu:

$a_3^2 - 15a_3 + 36 = 0$ tj. $a_{3,1} = 12 \quad a_{3,2} = 3$

pa su traženi brojevi: $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$.

Zadatak 59. Odrediti zapreminu piramide čija je osnova pravougaonik sa stranicama a=$1,2\ cm$ i $b=0,9\ cm$, dok su bočne ivice jednake dužine $S=1,25cm$. Ravan paralelna osnovi polovi visinu date piramide. Odrediti zapreminu dvaju dobijenih tela.

Rešenje:

Zapremina piramide je $V=\frac{1}{3}BH$. Visina piramide je $H=\sqrt{S^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}$, gde je d dijagonala osnove. Prema tome je $H=\frac{1}{2}\sqrt{(2S)^2-a^2-b^2}=1cm$. Ako je H_1 visina i V_1 zapremina odsečene piramide, iz njene sličnosti sa piramidom od koje je odsečena, izlazi $V_1:V=(H_1:H)^3=\frac{1}{8}\Rightarrow V_1=\frac{1}{8}V=0{,}045cm^2$. Ostatak je piramida zapremine $V_2=V-V_1=0{,}315\ cm^2$.

Zadatak 60. Osnovne ivice pravilne trostrane zarubljene piramide su a i b $(a>b)$, a bočne ivice zaklapaju sa osnovom ugao α. Odrediti zapreminu ove piramide.

Rešenje:
Visina pravilne trostrane piramide čija je osnovna ivica a i čije bočne ivice zaklapaju sa osnovom ugao α, ima visinu $H=\frac{a\sqrt{3}}{3}tg\alpha$. Prema tome njena zapremina V_1 iznosi $V_1=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{3}}{3}tg\alpha=\frac{a^3}{12}tg\alpha$. Ako se od ove piramide sa ravni paralelnoj osnovi odseče piramida čija je osnovna ivica b, njena zapremina V_2 određuje se na osnovu osobine sličnih tela

$V_2:V_1=(b:a)^3\Rightarrow V_2=\frac{b^3}{12}tg\alpha$.

Zapremina zarubljene piramide V ima vrednost $V=V_1-V_2=\frac{a^3-b^3}{12}tg\alpha$.

Zadatak 61. U polulopti poluprečnika R upisana je pravilna četvorostrana piramida čija baza leži na bazu lopte. Odrediti površinu i zapreminu piramide.

Rešenje:
Bazis ove piramide je kvadrat upisan u krug poluprečnika R. Ako je a stranica kvadrata, tada je $a\sqrt{2}=2R$ tj. $a=R\sqrt{2}$. Visina piramide je $H=R$. Bočna ivica piramide je $S=R\sqrt{2}$, što znači da je bočna strana piramide jednakostranični trougao stranice $R\sqrt{2}$. Na osnovu toga nalazimo $V=\frac{1}{3}a^2H=\frac{2}{3}R^3$,

$P=a^2+4\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=2\left(1+\sqrt{3}\right)R^2$.

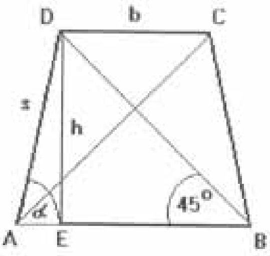
Zadatak 62. Osnova piramide SABC je jednakokraki trougao čije su stranice AB = AC = 5, BC = 6. Sredina D duži BC je podnožje visine piramide, a visina SD = 1. Naći površinu i zapreminu piramide.

Rešenje:
Neka su A, B, C, D temena ovog trapeza i S presek dijagonala. Kako su trouglovi ABS i CDS jednakokraki - pravougli, visina trapeza iznosi $h=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$. Krak c se dobija primenom Pitagorine teoreme, tj. $c^2=h^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\Rightarrow c=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Dijagonala trapeza zaklapa ugao od 45^0 sa osnovicom. Stoga je $d=h\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

Površina trapeza iznosi $P=\frac{a+b}{2}h=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Zadatak 63. Izračunati površinu jednakokrakog trapeza ako su mu dijagonale uzajamno ortogonalne, dužina kraka jednaka S i ugao između veće osnovice i kraka jednak α. Izračunati zapreminu zarubljene kupe koja nastaje obrtanjem tog trapeza oko njegove ose simetrije.

Rešenje:
Neka su a, b i h redom osnovice i visina trapeza. Pošto je trapez jednakokrak, a dijagonale su uzajamno ortogonalne, dijagonale zaklapaju sa osnovicama ugao od 45^0. Na osnovu toga možemo izraziti a, b i h pomoću S i α.



Kako je $h = S\cdot sin\alpha$, $AE = S\cdot cos\alpha$, imamo
a = AE + EB = AE + h = $S(sin\alpha + cos\alpha)$
b = a - 2AE - $S(sin\alpha - cos\alpha)$.
Površina trapeza iznosi
$$P=\frac{a+b}{2}h=S^2\,sin^2\alpha$$

Zapremina zarubljene kupe je

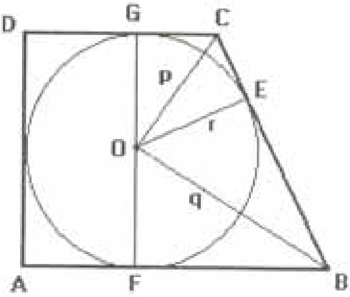
$V=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$ gde je $R=\frac{a}{2}$ i $r=\frac{b}{2}$.
Prema tome $V=\frac{\pi h}{12}\left(a^2+ab+b^2\right)=\frac{\pi}{12}S^2\,sin\,\alpha(2-cos2\alpha)$.

Zadatak 64. Središte kruga upisanog u pravougli trapez udaljeno je od krajeva dužeg kraka $p = 2\ cm$ i $q = 4\ cm$. Naći površinu tog trapeza.

Rešenje:

Na osnovu jednakosti $\sphericalangle GOC = \sphericalangle EOC$ i $\sphericalangle EOB = \sphericalangle FOB$ zaključujemo da je trougao COB pravougli, čija je hipotenuza duži krak trapeza $BC = \sqrt{p^2 + q^2}$. Hipotenuzna visina ovog trougla je poluprečnik upisanog kruga u trapez i iznosi $r = \dfrac{pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Kako su osnovice trapeza $AB = r + \sqrt{q^2 - r^2}$, $DC = r + \sqrt{p^2 - r^2}$ i visina $GF = 2r$, površina iznosi

$$P = r\left(2r + \sqrt{p^2 - r^2} + \sqrt{q^2 - r^2}\right)$$



Ako u ovu jednakost uvedemo izračunato r dobijamo

$P = \dfrac{pq(p+q)^2}{p^2 + q^2}$. Za $p = 2\ cm$ i $q = 4\ cm$ imamo $P = 14{,}4\ cm^2$.

Zadatak 65. Oštar ugao romba jednak je 30°, a njegova veća dijagonala ima dužinu d_1. U taj romb upisan je pravougaonik tako da se jedna od njegovih dijagonala poklapa sa manjom dijagonalom romba. Izračunati površinu tog pravougaonika.

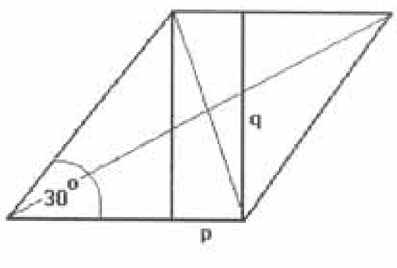
Rešenje:

Odnos dijagonala romba dat je jednakošću $\dfrac{d_1}{d_2} = tg15^0$. Stranice p i q pravougaonika su $p = d_2 \sin 15^0$ i $q = d_2 \cos 15^0$. Prema tome, površina pravougaonika iznosi

$$P = pq = d_2^2 \sin 15^0 \cos 15^0 = \frac{1}{2} d_2^2 \sin 30^0 =$$

$$= \frac{1}{4} d_2^2 = \frac{1}{4} d_1^2 tg^2 15^0 = \frac{1}{4} d_1^2 \frac{1 - \cos 30^0}{1 + \cos 30^0}$$

Odavde je $P = \left(\dfrac{7}{4} - \sqrt{3}\right) d_1^2$.



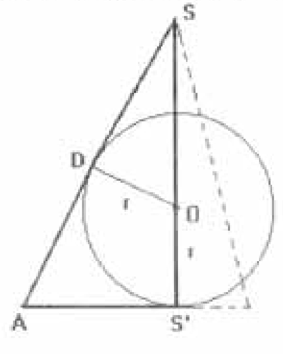
Zadatak 66. Izračunati poluprečnik sfere koja dodiruje osnovu ABC pravilnog tetraedra SABC i ivice SA, SB i SC ako je SA = a.

Rešenje:
Neka se S' podnožje visine tetraedra koja je spuštena iz S na osnovu ABC. Posmatrajmo trougao AS'S. Centar sfere O pripada visini SS'. Iz sličnosti trougliva AS'S i DOS dobijamo $\frac{DO}{OS}=\frac{AS'}{AS}$. Kako je DO = OS' = r,

AS = a, $AS'=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SS'=H=a\sqrt{\frac{2}{3}}$,

OS = H - OS' imamo

$\frac{r}{H-r}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}a$.



Zadatak 67. U sferu poluprečnika R upisan je valjak maksimalne zapremine. Dokazati da je $r : R = \sqrt{2} : \sqrt{3}$, gde je r poluprečnik osnove valjka.

Rešenje:
Neka je H visina valjka. Kako je njegova zapremina $V = \pi r^2 H$, a r, R i H su povezani Pitagorinom teoremom tj. $4R^2 = 4r^2 + H^2$, eliminacijom r dobijamo $V=\pi\left(R^2H-\frac{H^3}{4}\right)$. Iz uslova $\frac{dV}{dH}=\pi\left(R^2-\frac{3}{4}H^2\right)=0$ i $\frac{d^2V}{dH^2}=-\frac{3}{2}\pi H$ nalazimo da je zapremina maksimalna za $H^2=\frac{3}{4}R^2$, tj. za $r^2=\frac{2}{3}R^2$. Odavde sledi $r:R=\sqrt{2}:\sqrt{3}$ što je i trebalo dokazati.

Zadatak 68. Obim romba iznosi $2p$, a zbir njegovih dijagonala m. Naći njegovu površinu.

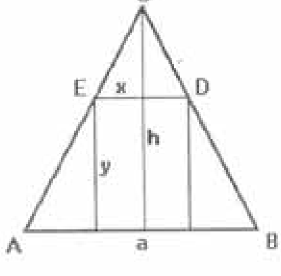
Rešenje:
Iz datih uslova imamo $2a = p$, $d_1 + d_2 = m$. Kako je $d_1 \cdot d_2 = 2P$, $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 = p^2$, iz $m^2 = (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2$ dobijamo $m^2 = p^2 + 4P$, tj. $P=\frac{m^2-p^2}{4}$. Da bi zadatak imao rešenje mora biti $m > p$.

Zadatak 69. Piramida čija je osnova pravougaonik sa stranicama a i b i jednakih bočnih ivica l presečena je jednom ravni paralelno osnovi na dva dela jednakih zapremina. Naći rastojanje vrha piramide od ravni preseka.

Rešenje:
Neka je H visina piramide i H_1 rastojanje vrha piramide od ravni preseka. Tada iz uslova datih u zadatku dobijamo $H_1^3 : H^3 = 1:2$ ... (*), tj. $H_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} H$. Kako je $d^2 = a^2 + b^2$ (d je dijagonala osnove), biće $H^2 = l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{4l^2 - a^2 - b^2}{4}$ pa na osnovu jednačine (*) dobijamo $H_1 = \frac{\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}}{2\sqrt[3]{2}}$.

Zadatak 70. U trouglu čija je osnovica a i visina h upisati pravougaonik najveće površine. Naći površinu tog pravougaonika.

Rešenje:
Površina pravougaonika $S = x \cdot y$. Iz sličnosti trouglova ABC i EDC izlazi $a : h = x : (h - y) \Rightarrow x = \frac{a}{h}(h - y)$, te je $S = \frac{a}{h}(hy - y^2)$. Maksimalna površina $S_{max} = \frac{ah}{4}$ dobija se za $y = \frac{h}{2}$.



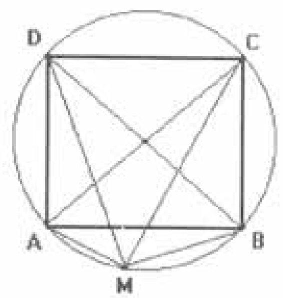
Zadatak 71. Oko lopte poluprečnika a opisana je zarubljena kupa čija je izvodnica S. Naći površinu te kupe.

Rešenje:
Neka je x poluprečnik donje osnove i y poluprečnik gornje osnove zarubljene kupe, h visina i S izvodnica. Ako se kupa preseče sa ravni koja prolazi kroz osnovu, dobija se tangentni četvorougao, za koji važi $x + y = S$ ... (*); $(x - y)^2 = S^2 - h^2$ ... (**) $\Rightarrow x - y = \sqrt{S^2 - h^2}$. Površina zarubljene kupe je

$P = \pi(x^2 + y^2 + s(x + y))$. Iz jednakosti (*) i (**) sledi $x^2 + y^2 = \frac{(2S^2 - h^2)}{2}$ pa je $P = \pi\left(2S^2 - \frac{h^2}{2}\right)$. Kako je $h = 2a$ dobijamo $P = 2\pi(S^2 - a^2)$.

Zadatak 72. U krug je upisan kvadrat ABCD. Neka je M tačka na luku AB, takva da je veličina duži AM jednaka 7, a veličina duži BM jednaka $5\sqrt{2}$. Izračunati veličine duži MD i MC.

Rešenje:
Posmatrajmo trougao AMB. Označimo stranicu kvadrata sa a. Ugao AMB jednak je 135^0, jer je to periferijski ugao nad lukom BCDA, čiji je odgovarajući centralni ugao 270^0.



Primenom kosinusne teoreme na trougao AMB dobijamo

$AB^2 = a^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot cos135^0 =$

$= 49 + 50 - 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 169,$

odakle je $a = 13$. Kako je trougao DMB pravougli, pomoću Pitagorine teoreme nalazimo

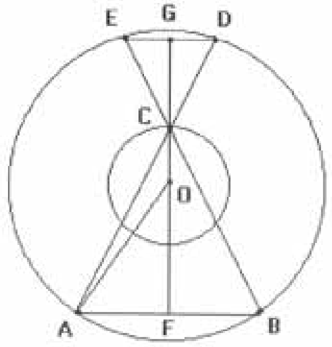
$MD^2 = BD^2 - MB^2 = (13\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^2 = 288 = 12^2 \cdot 2$ tj. $MD = 12\sqrt{2}$. Slično ovome iz pravouglog trougla AMC dobijamo

$MC^2 = AC^2 - MA^2 = (13\sqrt{2})^2 - 7^2 = 289$, odakle je $MC = 17$.

Zadatak 73. Data su dva koncentrična kruga čiji su poluprečnici r i R $(r<R)$. Izračunati dužinu stranice jednakostraničnog trougla čije je jedno teme na krugu poluprečnika r, a ostala dva na krugu poluprečnika R.

Rešenje:
Na slici je prikazan kružni prsten sa konstruisanim jednakostraničnim trouglovima. Kao što se vidi, postoje dva rešenja.

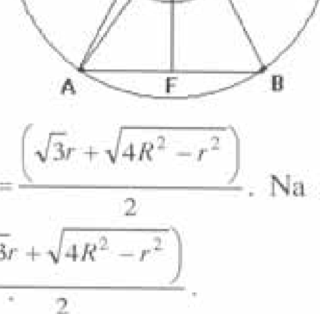
Neka je x stranica većeg trougla ABC. Obzirom da je $OF=CF-OC=\frac{\sqrt{3}}{2}x-r$ i $AF=\frac{x}{2}$, primenom Pitagorine teoreme na trougao AFO dobijamo
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-r\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=R^2$, tj.
$x^2-\sqrt{3}rx-\left(R^2-r^2\right)=0$.



Pozitivno rešenje ove kvadratne jednačine je $x=\frac{\left(\sqrt{3}r+\sqrt{4R^2-r^2}\right)}{2}$. Na sličan nači dobijamo stranicu y manjeg trougla $y=\frac{\left(-\sqrt{3}r+\sqrt{4R^2-r^2}\right)}{2}$.

Zadatak 74. U pravilni trougao ABC upisan je pravougaonik tako da jedna njegova stranica leži na hipotenuzi AB (ostala dva temena su na katetama). Odrediti stranice tog pravougaonika ako je njegova površina $P=\frac{5}{3}$, AC=4, BC=3.

Rešenje:
Pravougaoni trougao sa upisanim pravougaonikom prikazan je na slici.
Neka su stranice pravougaonika FG=x, EF=y i neka je hipotenuzna visina h_C. Iz sličnosti pravouglih trouglova EHC i ABC izlazi $EH{:}h=AB{:}h_0$, gde je h hipotenuzna visina trougla EHC. Kako je EH=x, $h_C=\frac{ab}{c}$, AB=c i $h=h_C-y$, imamo $\frac{x}{h_C-y}=\frac{c}{\frac{ab}{c}}$. Za $a=3$, $b=4$, $c=5$ dobijamo



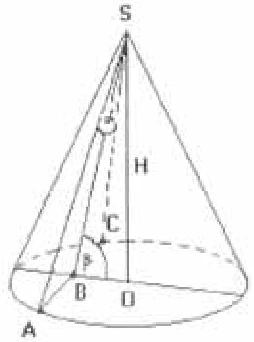
$h_C=\frac{12}{5}$, tako da jednačina postaje $x=5-\frac{25}{12}y$. Iz ove jednačine i uslova $p=xy=\frac{5}{3}$ dobijamo dva rešenja: $x_1=\frac{5}{6}, y_1=2, x_2=\frac{25}{6}, y_2=\frac{2}{5}$.

Zadatak 75. Dve izvodnice prave kupe koje grade ugao α određuju ravan π. Ravan π je nagnuta prema ravni osnove kupe za ugao β. Naći zapreminu kupe ako je njena visina H.

Rešenje:

Neka je h=BS visina trougla ASC. Imamo $H/h = sin\beta$, tj. $h = H/sin\beta$. Trougao BSC (ili ABS) je pravougli i njegova hipotenuza je $s=CS$ (ili $s=AS$). Odavde nalazimo $\frac{h}{s}=cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Prema tome

$$S=\frac{h}{cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{H}{sin\beta\, cos\frac{\alpha}{2}}.$$



Na osnovu toga izračunavamo zapreminu kupe:

$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\pi r^2 H=\frac{1}{3}\pi\left(s^2-H^2\right)H=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{sin^2\beta\, cos^2\frac{\alpha}{2}}-1\right)H^3$$

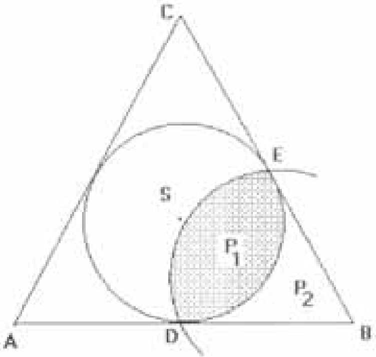
Zadatak 76. U jednakostraničnom trouglu stranice a=6 *cm* upisana je kružnica K_1. Jedno teme trougla je centar kružnice K_2 poluprečnika $\frac{a}{2}$. Izračunati (na dve decimale) površinu lika između K_1 i K_2.

Rešenje:

Presečne tačke kružnice K_1 i K_2 obeležimo sa D i E. Neka je P_1 površina kružnog isečka DBE, a P_2 površina figure između luka DE kružnice K_1 i duži DB i BE. Tada je tražena površina $P = P_1 - P_2$.

Dalje je $P_1=\frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{a^2\pi}{24}$, tj. šestina kruga $P_2=\frac{1}{3}\left[\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\right]=\frac{a^2}{36}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$.

Tražena površina $P=\frac{a^2}{72}\left(5\pi-6\sqrt{3}\right)$ za a = 6 imamo $P=\frac{1}{2}\left(5\pi-6\sqrt{3}\right)\approx 2.66$.



Zadatak 77. Od kvadrata stranice a načinjen je omotač valjka. Izračunati zapreminu valjka u funkciji od a.

Rešenje:
Zapremina valjka je $V=B\cdot H$. Kako je omotač napravljen od kvadrata stranice a to je $H=a$, a obim bazisa B je takođe a. Kako je bazis krug iz jednačine $O=2r\pi$ nalazimo da je $r=\dfrac{O}{2\pi}=\dfrac{a}{2\pi}$. Bazis je onda jednak $B=r^2\pi=\dfrac{a^2}{4\pi^2}\pi$ pa je tražena zapremina $V=B\cdot N=\dfrac{a^2}{4\pi^2}\cdot\pi\cdot a=\dfrac{a^3}{4\pi}$.

Zadatak 78. Ako se prečnik AB ma kog kruga podeli tačkama C i D na tri jednaka dela tako da je AC = CD = DB pa se nad AC i AD s jedne strane, a nad BD i BC s druge strane prečnika opišu polukrugovi, onda je površina kruga podeljena na tri jednaka dela. Dokazati.

Rešenje:
Površina osenčenog dela je

$$P=\frac{1}{2}r^2\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{3}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{3}\right)^2\pi=$$
$$=\frac{1}{2}r^2\pi-\frac{2}{9}r^2\pi+\frac{1}{18}r^2\pi=\frac{1}{3}r^2\pi$$

tj. predstavlja trećinu površine kruga. Lako se dokazuje da je površina osenčena tačkasto podudarna prvoj, tj. ona predstavlja takođe $\frac{1}{3}r^2\pi$ odakle sledi trvrđenje.